Math 256 — Orsay 2016-17
Analyse de Fourier pour la physique

Feuille d'exercices 4

Suites et séries de fonctions

Exercice 1 : Vrai ou faux (I). Dire pour chacune des propriétés suivantes si elle est vraie ou fausse. La prouver dans le premier cas, donner un contre-exemple dans le second.

1. Si une suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$, alors elle converge simplement sur $[a, b]$.
2. Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ qui converge uniformément sur $]a, b]$ et simplement en a, alors elle converge uniformément sur $[a, b]$.
3. Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur $[a, b]$. Soit $c \in [a, b]$. Si (f_n) converge uniformément sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$, alors elle converge uniformément sur $[a, b]$.

Exercice 2 : Etudier la convergence simple, puis uniforme sur l'intervalle I, des suites de fonctions suivantes :
1. $f_n(x) = \ln(x + \frac{1}{n})$, avec $I = [1, +\infty[$.
2. $f_n(x) = n^2 x(1 - nx)$ si $x \in [0, 1/n]$ et $f_n(x) = 0$ si $x \in]1/n, 1]$, avec $I = [0, 1]$.

Exercice 3 : Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $u_n(x) = x^n - x^{n+1}$ sur l'intervalle $[0, 1]$ et comparer les limites $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} u_n(x)\ \mathrm{d}x, \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 u_n(x)\ \mathrm{d}x$. Même question pour les suites de fonctions $v_n(x) = n(x^n - x^{n+1})$, $w_n(x) = n^2(x^n - x^{n+1})$. Conclusion ?

Exercice 4 : Montrer que la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)}$, $x \geq 0$ et $n \geq 1$, converge uniformément vers 0 sur $[0, +\infty[$.

Exercice 5 : Soit $f_n(x) = \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Etudier la convergence simple de la suite (f_n) ; en déduire, sans calcul, que (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 : Vrai ou faux (II). Même question que dans l'exercice 1 pour les assertions suivantes :

1. Il existe une suite réelle (a_n) telle que la série de fonctions $\sum a_n x^n$ ne converge pour aucun $x \in \mathbb{R}^*$.
2. Si (f_n) est une suite de fonctions C^1 sur $[a, b]$ et la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a, b]$, alors la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[a, b]$.
3. Si $\sum f_n$ est une série de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$, et telle que $f_n(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors la série $\sum f_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 : Etudier les convergences simple, normale et uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ de terme général $f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$, puis sur l'intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 8 : 1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$; on notera $S(x)$ sa somme.
2. Soit $a > 0$, montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$. En déduire que S est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Soit $a > 1$, montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

Exercice 9 : Soit $I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - a} d\theta$ pour $a \in \mathbb{C}$ et $|a| \neq 1$.
Lorsque $|a| < 1$, en remarquant que $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{a}{e^{i\theta}})^n = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - a}$, montrer que $I(a) = 2\pi$. Procéder de façon similaire pour montrer que $I(a) = 0$ lorsque $|a| > 1$.

Exercice 10 : Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. En utilisant le théorème de dérivation d'une série de fonctions, calculer $f'(x)$; en déduire l'égalité

$$\ln(1 - x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

pour tout $x \in]-1,1[$.