FEUILLE D'EXERCICES 3

SÉRIES NUMÉRIQUES

Exercice 1 : Vrai ou Faux. Dire pour chacune des propriétés suivantes si elle est vraie ou fausse. La prouver dans le premier cas, donner un contre-exemple dans le second.

1. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive décroissante alors la série Σa_n converge.
2. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et tend vers 0 alors la série $\Sigma(-1)^n a_n$ converge.
3. Si la suite $(\sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors la série Σa_n converge.
4. Si la série Σa_n diverge alors la série $\Sigma|a_n|$ diverge.
5. Si la série Σa_n converge alors la suite a_n tend vers 0.
6. Si a_n est décroissante positive et tend vers 0, alors la série Σa_n^2 converge.

Exercice 2 : Comparer à une série de Riemann ($\sum n^s$) pour étudier la convergence des séries suivantes :

$$1)\ \sum \frac{-1-\sin n}{n^2} \qquad 2)\ \sum \frac{1}{n^3 \ln n} \qquad 3)\ \sum \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$$

$$4)\ \sum \frac{\ln n}{n^2} \qquad 5)\ \sum \frac{1}{\sqrt{n}\ln n} \qquad 6)\ \sum a^{\sqrt{n}} \quad (a>0)$$

Exercice 3 : Etudier la convergence de la série $\sum u_n$ pour :

$$1)\ u_n = \frac{n^2+(-1)^n \ln n - 5}{n^6+2^n+\cos n} \qquad 2)\ u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\sin\frac{1}{n}$$

$$3)\ u_n = (n^3+n+1)^{\frac{1}{3}} - (n^2-1)^{\frac{1}{2}} \qquad 4) u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n \ln n}$$

Exercice 4 : Déterminer en fonction des réels a et b si la série Σu_n converge, pour

$$1)\ u_n = \frac{1}{n^a (\ln n)^b} \qquad 2)\ u_n = \frac{a^n}{1+bn}.$$

Exercice 5 : On se propose de montrer que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} |\frac{\sin t}{t}|\, dt$ est divergente.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$ contient un intervalle de la forme $I_n = [a_n, b_n]$ de longueur $2\pi/3$, tel que pour tout $t \in I_n$, on ait $|\sin t| \geq 1/2$.

b) Montrer que $\int_{a_n}^{b_n} |\frac{\sin t}{t}|\, dt \geq \frac{1}{3(n+1)}$.

c) En déduire que la suite $\int_{\pi}^{(n+1)\pi} |\frac{\sin t}{t}|\, dt$ n'est pas majorée, et conclure.

Exercice 6 : Déterminer la nature (absolue convergence, convergence, divergence) des séries :

$$1)\ \sum \frac{\sin n}{1+n^2} \qquad 2)\ \sum (-1)^n \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n} \qquad 3)\ \sum \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

Exercice 7 : (*) On définit une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ en posant pour tout $k \geq 0$: $u_{3k} = \frac{1}{\ln(k+2)}$ et $u_{3k+1} = u_{3k+2} = -\frac{1}{2\ln(k+2)}$.

a) Écrire les 6 premiers termes de la suite (u_n).

b) Montrer que la série $\sum u_n$ converge mais que la série $\sum u_n^3$ diverge.

c) Généraliser b) à $\sum u_n^r$ avec $r \geq 2$.

Exercice 8 : (*) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels ou complexes. On pose $U_0 = 0$ et $U_n = \sum_{k=1}^n u_k$ pour $n \geq 1$. On pose également $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{k}$.

a) Exprimer u_n en fonction de U_n.

b) Montrer que $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{U_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{U_k}{k+1}$.

c) En déduire que $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{U_k}{k(k+1)} + \frac{U_n}{n}$.

d) Montrer que si la suite (U_n) est bornée, alors la série $\sum_{k\geq 1} \frac{U_k}{k(k+1)}$ est absolument convergente; en déduire que dans ce cas la série $\sum_{k\geq 1} \frac{u_k}{k}$ est convergente (le procédé utilisé, appelé *transformation d'Abel*, est très analogue à une intégration par parties).

e) Soit t un nombre réel qui n'est pas de la forme $2m\pi$ avec $m \in \mathbf{Z}$. On pose $u_k = e^{ikt}$. Calculer $\sum_{k=1}^n e^{ikt}$, et en déduire que la suite $U_n = \sum_{k=1}^n e^{ikt}$ est bornée.

f) En utilisant d) et e), montrer que la série $\sum_{k\geq 1} \frac{e^{ikt}}{k}$ est convergente. Qu'en déduit-on pour les séries $\sum_{k\geq 1} \frac{\sin(kt)}{k}$ et $\sum_{k\geq 1} \frac{\cos(kt)}{k}$?