Feuille d'exercices 2

Intégrales

Exercice 1 : Chercher deux nombres réels A et B tels que :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}.$$

En déduire la valeur de l'intégrale $\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)}$.

Exercice 2 : a) Pour tout x réel, on pose

$$I(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt.$$

En effectuant le changement de variable $t = \tan u$, retrouver qu'une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est la fonction arctan.

b) Trouver une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sin t}$ (on précisera d'abord soigneusement son domaine de définition), en effectuant un changement de variable $u = \cos t$.

(*) c) Même question avec la fonction $t \mapsto \frac{1}{\cos t}$, en faisant un changement de variable $u = \sin t$.

(*) Exercice 3 : Soient $z_1, ..., z_r$ des nombres complexes. Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z) = (z-z_1)(z-z_2)...(z-z_r) = \prod_{i=1}^r (z-z_i)$.

a) Montrer que $\int_0^{2\pi} e^{-irt}P(e^{it})dt = 2\pi$ (on calculera d'abord $\int_0^{2\pi} e^{int}\,dt$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$).

b) En déduire qu'il existe un nombre complexe z_0 de la forme $z_0 = e^{it}$ avec $t \in \mathbb{R}$ (i.e. un nombre complexe de module 1) tel que $|P(z_0)| \geq 1$ (raisonner par l'absurde). Interprétation géométrique ?

Exercice 4 : Soient a et b des réels avec $a < b$. Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle que f *est bornée et atteint ses bornes*, c'est-à dire qu'il existe des réels m et M vérifiant $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$, et il existe alors des réels x_1, x_2 dans $[a,b]$ tels que $f(x_1) = m$ et $f(x_2) = M$.

a) Montrer ("formule de la moyenne") qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt$$

On commencera par chercher un encadrement de l'intégrale.

b) Soit $f(t) = e^{it}$. Calculer $\int_0^{2\pi} f(t)\, dt$, et en déduire que la conclusion de a) peut être *fausse* pour une fonction à valeurs complexes au lieu de réelles.

Exercice 5 : En effectuant des intégrations par parties ou des changements de varaiable, étudier si les intégrales généralisées suivantes convergent ou non, et quand elles convergent, donner leur valeur.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\ dx}{x^2+4}; \quad \int_0^{+\infty} x\ \sin(2x) dx; \quad \int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{x^2+4}; \quad \int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt;$$

Exercice 6 : Etudier la convergence de chacune des intégrales impropres suivantes, en précisant où se situe(nt) le(s) point(s) à problème. Même en cas de convergence, on ne demande pas de calculer la valeur de l'intégrale.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2+2}}; \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^3+1} dt; \quad \int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t^3-t^5}} dt; \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t-1} dt;$$

Exercice 7 : a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^n\, dt$ converge.
b) Donner une relation de récurrence permettant de calculer I_n, $n \geq 0$. En déduire la valeur de I_n.

(*) Exercice 8 : Un astéroïde s'approche de la Terre, il se rapproche selon la loi

$$\frac{dr}{dt} = -f(r(t)),$$

où $r(t)$ est sa distance au centre de la Terre au temps t, et f est une fonction continue positive. On suppose que $r(0) > R_T$ (où R_T est le rayon de la Terre).

Décrire ce qui se passe dans les cas suivants :
(a) la fonction f ne s'annule pas pour $r \geq R_T$;
(b) il existe $r_0 \geq R_T$ tel que $f(r_0) = 0$ (on discutera en particulier le cas où $f(r) \sim |r - r_0|^\alpha$ au voisinage de r_0).