FEUILLE D'EXERCICES 1

LIMITES DE SUITES

Les questions marquées (*) sont a priori plus difficiles.

Exercice 1 - Vrai ou Faux ? Dire pour chacune des propriétés suivantes si elle est vraie ou fausse. La prouver dans le premier cas, donner un contre-exemple dans le second.

a - Une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.

b - Toute suite réelle croissante et majorée est bornée.

c - Si une suite de nombres complexes (u_n) converge, alors $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

d - Soit (u_n) une suite réelle. Si $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors la suite (u_n) converge.

e - (*) Une suite réelle (u_n) est convergente si et seulement si la suite (e^{u_n}) est une suite convergente.

Exercice 2 - Soit (u_n) une suite de nombre réels strictement positifs telle que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers un nombre réel a.

a - Donner un exemple d'une telle suite pour laquelle on a $a = 0$. Même question avec $a = 1$ et $a = 2$.

b - On suppose que $a < 1$. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

c - On suppose que $a > 1$. Montrer que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

d - (*) Supposons que $a = 1$, que peut-on dire sur la convergence de (u_n) ?

Exercice 3 - Calculer la limite, si elle existe, des suites suivantes :

$$\textbf{1)}\ u_n = \frac{n+4}{n^2-5n+1} \qquad \textbf{2)}\ u_n = \sin\frac{(-1)^n}{n} \qquad \textbf{3)}\ u_n = \frac{\ln n}{n^2+1} \qquad \textbf{4)}\ u_n = \frac{n^2+2^n}{3^n}$$

$$\textbf{5)}\ u_n = \cos\frac{n\pi}{2} \qquad \textbf{6)}\ u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \textbf{7)}\ u_n = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Exercice 4 - Calculer la limite, si elle existe, des suites suivantes : (*) **1)** $u_n = \left(\frac{\cos(a+1/n)}{\cos a}\right)^n$, où a est un réel fixé avec $a \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

$$\textbf{2)}\ u_n = n^2(2^{1/n^2} - 1).$$

Exercice 5 - Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + ... + \dfrac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n(n!)}$.

a - Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, c'est-à-dire que l'une est croissante, l'autre décroissante et que leur différence tend vers 0.

b - En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont même limite l.

c - Trouver un intervalle contenant l et de longueur inférieure à 0,02.

Exercice 6 - **a -** Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On proposera au moins deux méthodes différentes.

b - (*) En déduire, pour tout $x \geq 0$, la limite de la suite $u_n = \dfrac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$, où $\lfloor kx \rfloor$ désigne la partie entière de kx, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à kx.

Exercice 7 - Donner la limite des suites suivantes :

1) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$ **2)** $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ (*) **3)** $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln(1 - \frac{1}{k^2})$.

Exercice 8 - Un compte en banque est rémunéré à 2%. Une fois par an, à la date anniversaire de la création du compte, les intérêts sont crédités, puis 40 euros de frais de fonctionnement sont débités.

On fait un versement initial de 1000 euros et on laisse le compte au repos. Que se passe-t-il ?

Quel versement initial faut-il faire au minimum pour que le compte ne se vide pas ?

On fait un versement initial de 3000 euros. Est-ce que le compte atteindra un jour les 5000 euros, si oui, en combien d'années ?