Feuille d'exercices 0

Révision nombres complexes et trigonométrie

Exercice 1 : Vrai ou faux ?

Parmi les assertions suivantes, dire lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses en justifiant :

a) Pour tout nombre complexe t, le nombre complexe e^{it} est de module 1.

b) Si un nombre complexe z vérifie $z^n = 1$ pour un entier $n \geq 1$, alors z est de la forme $z = e^{it}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

c) Si r et t sont des réels, alors le conjugué du nombre complexe re^{it} est re^{-it}.

d) Si $t_1, ..., t_n$ sont des réels, alors le module $|e^{it_1} + ... + e^{it_n}|$ du nombre complexe $e^{it_1} + ... + e^{it_n}$ est égal à n.

Exercice 2 : Équations complexes

Soit $u = a + ib$ un nombre complexe, avec $a, b \in \mathbb{R}$. On cherche à résoudre l'équation (E) : $z^2 = u$, avec $u \in \mathbb{C}$. On pose $z = c + id$ avec $c, d \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que c et d doivent vérifier les conditions :

$$c^2 - d^2 = a; \quad cd = b/2; \quad c^2 + d^2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Montrer que réciproquement, si les deux premières de ces conditions sont vérifiées, alors $c + id$ est bien une solution de l'équation (E).

b) Montrer que les réels $\sqrt{a^2 + b^2} + a$ et $\sqrt{a^2 + b^2} - a$ sont positifs ou nuls.

c) On suppose que $c + id$ est solution de (E). Montrer que $c = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}$ ou $c = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}$. Montrer de même que $d = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$ ou $d = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$.

d) Trouver toutes les solutions de (E).

e) Expliciter les solutions de (E) quand $u = i$.

Exercice 3 : Quelques calculs trigonométriques

a) Soit x un réel. Calculer $\sin(x + \pi/2)$ et $\cos(x + \pi/2)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

b) Même questions pour $\sin(x + \pi/3)$ et $\cos(x + \pi/3)$.

c) Mêmes questions pour $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$.

Exercice 4 : Racines de l'unité

Soit n un entier au moins égal à 2.

a) En cherchant z sous forme trigonométrique, montrer qu'il existe exactement n nombres complexes z vérifiant $z^n = 1$. Expliciter ces n nombres complexes.

b) Soit u un nombre complexe non nul. Combien de solutions dans $\mathbb{C}$ possède l'équation (d'inconnue z) $z^n = u$? (On montrera d'abord qu'il existe une solution z_0, puis en utilisant a) on exprimera les autres solutions en fonction de z_0).