Math 256-Quelques exercices-type sur les séries entières

David Harari

2016-2017

1. Rayons de convergence. En général, pour déterminer le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$, on utilise l'une des deux caractérisations suivantes :

i) La série converge si $|z| < R$, et elle diverge si $|z| > R$.

ii) R est le sup des nombres réels positifs ou nuls r tels que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée.

Noter en particulier que pour calculer le rayon de convergence, on peut toujours remplacer $a_n z^n$ par son module $|a_n z^n|$. On peut parfois avoir recours aux règles d'Hadamard ou de d'Alembert, mais il faut faire attention au fait qu'elles ne permettent pas toujours de conclure.

Voici quelques exemples :

a) La série entière $\sum n^3 z^n$ a pour rayon de convergence 1, tout comme $\sum \frac{z^n}{n^3}$. Dans ces exemples, la règle de d'Alembert s'applique bien. Plus généralement, elle donne que si $P(n) = n^k + a_{k-1}n^{k-1} + ... + a_0$ est un polynôme en n, le rayon de convergence de $\sum P(n)z^n$ est 1. De même, le rayon de convergence de $\sum (3^n + 2017)z^n$ est $1/3$ via d'Alembert.

b) Pour une série lacunaire comme $\sum \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, la règle de d'Alembert ne marche pas. Par contre, on voit que $|\frac{z^{2n+1}}{2n+1}|$ est une suite bornée si et seulement si $|z| \leq 1$, ce qui donne que le rayon de convergence est 1. Le même principe donne que le rayon de convergence de $\sum n! z^{2n}$ est 0 et celui de $\sum \frac{z^{2n}}{n!}$ est $+\infty$.

2. Calcul de développements en série entière en utilisant la dérivée.

Les séries entières ont ceci de particulier que tant qu'on reste à l'intérieur de l'intervalle $]-R, R[$, où R est le rayon de convergence, on peut sans problème dériver la série terme à terme autant de fois qu'on veut, ou encore l'intégrer terme à terme. Voici des exemples où cela peut servir à calculer des développements en série entière.

a) On cherche un développement en série entière au voisinage de zéro de $f(x) = \ln(1-x)$. On observe que $f'(x) = -\frac{1}{1-x}$ et pour tout $t \in]-1, 1[$, on a :

$$-\frac{1}{1-t} = -\sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

En intégrant les deux membres entre 0 et x, on obtient pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

Noter dans cet exemple que bien que la fonction f soit définie pour tout $x < 1$, le développement en série entière n'est valable que pour $x \in]-1, 1[$.

b) Soit $f(x) = \arctan(x)$. Cette fonction est définie sur $\mathbf{R}$ et $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Pour tout $t \in]-1, 1[$, on a

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-t^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}.$$

En intégrant, on obtient pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}.$$

Là encore, la série ne converge pas si $t > 1$ (pour $t = 1$, elle converge d'après le critère des séries alternées, mais elle ne converge pas absolument), bien que la fonction arctan soit définie sur $\mathbf{R}$ tout entier.

3. Séries entières et équations différentielles. Il est fréquent de chercher des solutions d'une équation différentielle sous forme d'une fonction définie par une série entière. Voici un exemple.

On cherche les fonctions f qui vérifient $f'(x) - f(x) = x$, avec de plus la condition $f(0) = 0$. On cherche f sous la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On a alors $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$. Comme $f(0) = 0$, on doit avoir $a_0 = 0$. L'équation donne ensuite $a_1 - a_0 = 0$, $2a_2 - a_1 = 1$, et $na_n - a_{n-1} = 0$ pour tout $n \geq 3$. On trouve donc

$$a_1 = 0, a_2 = 1/2, a_3 = 1/6, a_4 = 1/24, ...$$

et par récurrence $a_n = 1/n!$ pour tout $n \geq 3$. Finalement la fonction

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

vérifie bien l'équation (noter que le rayon de convergence de la série est $+\infty$). On peut noter que $f(x) = e^x - x - 1$, c'est-à-dire qu'ici on a pu exprimer la série à l'aide d'une fonction usuelle (ce n'est pas toujours le cas).

On peut aussi remarquer que si g est une fonction telle que $g'(x) - g(x) = x$ (sans supposer que $g(0) = 0$), alors la fonction $h = g - f$ vérifie $h'(x) = h(x)$, elle est donc de la forme $h(x) = Ce^x$, où C est une constante. Ainsi les solutions de l'équation différentielle sont exactement les fonctions de la forme $e^x - x - 1 + Ce^x$, où C est une constante. La recherche d'une solution particulière avec une série entière est souvent la première étape pour résoudre ce type d'équations.