Math 256-Suites

David Harari

2016-2017

1. Définition, premières propriétés

1.1. Généralités

Définition 1.1 Une *suite réelle* est une application u de $\mathbf{N} := \{0, 1, ...\}$ dans $\mathbf{R}$. De même, une *suite complexe* est une application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{C}$.

On notera en général u_n (plutôt que $u(n)$) l'image de n par l'application u, et on dit que u_n est le n*-ième terme* de la suite. La suite sera notée $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, ou encore $(u_n)_{n\geq 0}$, ou simplement (u_n). On s'intéressera aussi parfois à des suites définies seulement à partir du rang n_0, auquel cas on notera la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Exemple 1.2 a) La suite définie par $u_n = n$ est la suite $0, 1, ...$ de tous les nombres entiers.

b) La suite $u_n = 1/n$ est définie pour $n > 0$, on peut la noter $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

c) La suite $u_n = \sqrt{n^2 - 3}$ est définie pour $n \geq 2$.

d) Pour $x \in \mathbf{R}$ fixé, on peut définir une suite de nombres complexes par $u_n = e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$.

Il y a plusieurs manières de définir une suite :

a) Par une formule explicite donnant l'expression de u_n en fonction de n. C'est le cas dans les exemples ci-dessus. On pourrait aussi par exemple considérer $u_n = 2n$ (suite des nombres pairs) ou encore $u_n = 2n + 1$ (suite des nombres impairs).

b) Par une *formule de récurrence*, donnant un procédé pour obtenir u_{n+1} en fonction de u_n. Dans ce cas il faut aussi préciser quel est le premier terme de la suite. Par exemple on peut définir la suite des nombres pairs en posant $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 2$. De même, la suite des nombres impairs s'obtient en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2$. On voit donc que si on change le premier terme, la suite peut être très différente même si la formule de récurrence est la même.

c) Il arrive parfois qu'on définisse une suite par *récurrence double*, en donnant u_0, u_1, et une formule donnant u_{n+2} en fonction de u_n et u_{n+1}. Par exemple la *suite de Fibonacci* est définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$. Ses premiers termes sont $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$. Observons sur cet exemple qu'il n'est pas toujours évident (ni même possible !) de donner une formule explicite pour u_n pour une suite (u_n) définie par récurrence.

d) Il peut enfin arriver qu'une suite soit définie par une propriété moins explicite, par exemple en définissant u_n comme le n-ième nombre premier; les premiers termes de cette suite sont $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17...$

Remarque 1.3 On ne confondra pas la suite (u_n) avec l'ensemble de ses valeurs. Par exemple la suite définie par $u_0 = -1$ et $u_n = 1$ si $n \geq 1$ est différente de la suite (v_n) définie par $v_n = (-1)^n$, bien que l'ensemble des valeurs prises par chacune de ces suites soit $\{-1, 1\}$.

1.2. Quelques propriétés

Attention, la définition suivante n'a de sens que pour les suites *réelles*, pas pour les suites complexes.

Définition 1.4 Une suite de nombres réels (u_n) est *croissante* (resp. *strictement croissante*) si on a $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout n (resp. $u_n < u_{n+1}$ pour tout n). On dit que (u_n) est *décroissante* (resp. *strictement décroissante*) si on a $u_n \geq u_{n+1}$ pour tout n (resp. $u_n > u_{n+1}$ pour tout n).

Exemple 1.5 a) La suite $u_n = \sqrt[3]{n}$ est strictement croissante.

b) La suite $u_n = 1/n$ (définie pour $n > 0$) est strictement décroissante.

c) Si (u_n) est croissante, alors $(-u_n)$ est décroissante et vice-versa.

d) La suite $u_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante.

Remarque 1.6 Si f est une fonction croissante d'un intervalle de $\mathbf{R}$ (contenant $\mathbf{N}$) dans $\mathbf{R}$, alors la suite $u_n = f(n)$ est croissante, ce qui permet parfois de déterminer si u_n est croissante ou décroissante en calculant la dérivée de la fonction f. Attention, la réciproque est fausse : par exemple la fonction $f(x) = \sin(2\pi x)$ n'est pas croissante ni décroissante mais la suite $u_n = \sin(\pi n) = 0$ est constante, donc elle est à la fois croissante et décroissante !

Par ailleurs, un procédé utile pour étudier si une suite (u_n) est croissante ou décroissante (surtout si (u_n) est définie par récurrence) consiste à étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$, ou encore la position par rapport à 1 de u_{n+1}/u_n *si on sait*[1] *que* $u_n > 0$.

La définition suivante n'est également valable que pour des suites réelles.

Définition 1.7 Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) est *majorée* s'il existe un réel M tel que pour tout n, on ait $u_n \leq M$. On dit que (u_n) est *minorée* s'il existe un réel m tel que pour tout n, on ait $u_n \geq m$.

On peut écrire cela avec des quantificateurs : (u_n) majorée signifie

$$\exists M \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, u_n \leq M.$$

et (u_n) minorée se traduit par

$$\exists m \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, u_n \geq m.$$

On fera comme d'habitude très attention à l'ordre dans lequel on met les quantificateurs. Par exemple dire que pour tout n il existe M tel que $u_n \leq M$ ne dit rien du tout (il suffirait de prendre $M = u_n + 1$ pour que ce soit toujours vrai), il est essentiel dans la définition que M *ne dépende pas de* n.

Exemple 1.8 a) La suite $u_n = n^{2017}$ est minorée mais pas majorée.

b) La suite $u_n = -n$ est majorée mais pas minorée.

c) Si (u_n) est majorée, alors $(-u_n)$ est minorée et vice-versa.

d) La suite $u_n = -1/n$ $(n > 0)$ est majorée par 0 et minorée par -1.

e) La suite $u_n = (-1)^n n$ n'est ni majorée ni minorée.

Noter que (u_n) non majorée se traduit par

$$\forall M \in \mathbf{R}, \exists n \in \mathbf{N} u_n > M.$$

(noter l'inversion dans les quantificateurs). On laisse le soin au lecteur de traduire de même "(u_n) n'est pas minorée".

Définition 1.9 Une suite réelle (u_n) est *bornée* si elle est majorée et minorée. C'est équivalent à dire que la suite $(|u_n|)$ est majorée.

Noter que cette dernière définition s'étend aux nombres complexes : une suite de nombres complexes (u_n) est bornée si la suite des modules $(|u_n|)$ est majorée. C'est équivalent à dire que les deux suites $(\mathrm{Re}(u_n))$ et $(\mathrm{Im}(u_n))$ sont bornées.

---

[1] Attention, si on sait que $u_{n+1}/u_n \geq 1$, on ne peut comparer u_n et u_{n+1} que si on connaît le signe de u_n, car multiplier par un nombre négatif renverse le sens d'une inégalité.

1.3. Deux types de suites particulières

Il est parfois utile d'avoir des suites de références auxquelles on peut comparer d'autres suites. Dans ce but, on introduit deux types de suites avec lesquelles il est facile de calculer.

Définition 1.10 Une suite réelle (resp. complexe) (u_n) est dite *arithmétique* s'il existe un réel (resp. un complexe) r tel que pour tout n, on ait $u_{n+1} = u_n + r$. Le nombre r s'appelle la *raison* de la suite (u_n).

Par exemple, la suite des nombres pairs (ou encore des nombres impairs) est arithmétique de raison 2. On vérifie aisément par récurrence qu'une suite arithmétique (u_n) a pour terme général $u_n = u_0 + nr$, ou encore (si on commence la suite avec u_1) $u_n = u_1 + (n-1)r$. Elle est croissante si c'est une suite réelle avec $r \geq 0$, décroissante si $r \leq 0$.

Proposition 1.11 *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors on a*

$$u_0 + ... + u_n = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration : Comme $u_n = u_0 + nr$, on a

$$u_0 + ... + u_n = (n+1)u_0 + r(1 + ... + n).$$

Il suffit donc de savoir que

$$1 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

ce qui se montre facilement par récurrence sur n.

□

Définition 1.12 Une suite réelle (resp. complexe) (u_n) est dite *géométrique* s'il existe un réel (resp. un complexe) q tel que pour tout n, on ait $u_{n+1} = qu_n$. Le nombre q s'appelle la *raison* de la suite (u_n).

Dans ce cas, on a $u_n = u_0 q^n$, ainsi si la raison est 1 la suite est constante. Il est parfois utile de calculer la somme des n premiers termes d'une suite géométrique. Cela se fait à l'aide du théorème suivant :

Theorème 1.13 *Soit q un réel (ou un complexe). Alors, si $q \neq 1$, on a*

$$1 + q + ... + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Démonstration : Par récurrence sur n. Pour $n = 1$, on vérifie que $1 + q = \frac{q^2-1}{q-1}$. Supposons le résultat vrai pour n. Alors par hypothèse de récurrence, on a

$$1 + q + ... + q^n + q^{n+1} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + q^{n+1} =$$

$$\frac{q^{n+1} - 1 + q^{n+1}(q - 1)}{q - 1} = \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1},$$

ce qui termine la preuve.

□

Corollaire 1.14 *Soit* (u_n) *une suite géométrique de premier terme* u_0 *et de raison* q. *Si* $q \neq 1$, *on a*

$$u_0 + u_1 + ... + u_n = u_0(1 + q + ... + q^n) = u_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1},$$

et si $q = 1$ *on a*

$$u_0 + ... + u_n = (n + 1)u_0.$$

2. Limite d'une suite

2.1. Définition, premiers exemples

Soit (u_n) une suite réelle. On a envie de dire que sa limite est le réel l si à partir d'un certain rang, les termes de la suite s'approchent aussi près qu'on veut de l. Cette idée intuitive se formalise via la définition suivante :

Définition 2.1 Soit l un réel. On dit qu'une suite réelle (u_n) *a pour limite* l (ou encore qu'elle *tend vers* l, ou encore qu'elle *converge vers* l) si pour tout réel $\varepsilon > 0$ (aussi petit qu'on veut mais quand même strictement positif), il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$. On note alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ ou simplement $\lim u_n = l$. Une suite qui a une limite $l \in \mathbf{R}$ sera dite *convergente*.

Avec des quantificateurs, la propriété $\lim u_n = l$ se traduit par

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geq n_0, \quad l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon.$$

On peut aussi remplacer $l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon$ par $|u_n - l| \leq \varepsilon$.

Remarque 2.2 a) Si une suite tend à la fois vers l et vers l', alors $l = l'$ ("unicité de la limite"), comme on peut le montrer par l'absurde si on suppose $l' \neq l$, en prenant $0 < \varepsilon < |l' - l|/2$ dans la définition.

b) Changer un nombre fini de termes d'une suite ne change pas sa limite.

c) Toute suite convergente est bornée. En effet prenons par exemple $\varepsilon = 1$, alors toutes les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0 sont entre $l - 1$ et $l + 1$. Si m est le plus petit des termes $u_0, ..., u_{n_0}$ et M le plus grand de ces termes, alors la suite est majorée par $\max(M, l + 1)$ et minorée par $\min(m, l - 1)$. On observe au passage que pour montrer qu'une suite est bornée, on peut toujours ignorer un nombre fini de termes de la suite.

d) Attention, il y a des suites qui n'ont pas de limite, par exemple la suite $u_n = (-1)^n$, qui est pourtant bornée.

Exemple 2.3 a) La suite $u_n = 1/n$ tend vers 0.

b) La suite $u_n = (-1)^n/n$ tend vers zéro. Noter qu'elle n'est ni croissante ni décroissante.

c) La suite $u_n = (1 + 1/n)^2$ tend vers 1. On a en effet

$$0 < u_n - 1 = 2/n + 1/n^2 \leq 3/n,$$

ce qui montre que si $\varepsilon > 0$, alors $|u_n - 1| \leq \varepsilon$ dès que $n \geq 3/\varepsilon$.

L'avantage de la définition utilisant $|u_n - l|$ est qu'elle s'étend aux suites complexes :

Définition 2.4 Soit (z_n) une suite de nombres complexes. Soit $l \in \mathbf{C}$. On dit que (z_n) a pour limite l si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on ait $|z_n - l| \leq \varepsilon$. Il revient au même de dire qu'on a les deux propriétés : $(\mathrm{Re}(z_n))$ converge vers $\mathrm{Re}(l)$ et $(\mathrm{Im}(z_n))$ converge vers $\mathrm{Im}(l)$

Par exemple la suite $z_n = e^{i/n} = \cos(1/n) + i \sin(1/n)$ tend vers 1 (on anticipe ici sur un critère que nous verrons plus loin : si une suite (u_n) tend vers l et si une fonction f est continue en l, alors la suite $(f(u_n))$ tend vers $f(l)$. On applique alors ceci aux fonctions cosinus et sinus en $l = 0$).

Définition 2.5 On dit qu'une suite réelle (u_n) *a pour limite* $+\infty$ (ou encore qu'elle *tend vers* $+\infty$) si pour tout réel M, il existe un rang n_0 à partir duquel $u_n \geq M$. On note alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. De même (u_n) tend vers $-\infty$ si pour tout réel m, il existe un rang n_0 à partir duquel $u_n \leq m$.

Par exemple les suites $u_n = n^2$ et $u_n = \ln n$ tendent vers $+\infty$.

2.2. Critères pour montrer qu'une suite tend vers l

Comme les définitions sont souvent difficiles à utiliser directement, on a intérêt à avoir recours à quelques critères, que nous allons maintenant examiner.

a) Comparaison. Si une suite (u_n) vérifie

$$|u_n - l| \leq v_n$$

à partir d'un certain rang ("a.p.c.r.") et (v_n) est une suite qui tend vers zéro, alors la suite (u_n) tend vers l. Ce critère est souvent utile quand on connaît quelques suites de références qui tendent vers zéro :

La suite $1/n^k$ tend vers zéro si $k > 0$.

La suite a^n tend vers zéro si $|a| < 1$ (ici a pourrait être un nombre complexe). On a même que $n^k a^n$ tend vers zéro si $|a| < 1$, pour tout réel k.

La suite $\ln n/n^k$ tend vers 0 si $k > 0$, mais $1/\ln n$ tend vers zéro (ou encore $\ln n$ tend vers $+\infty$).

Exemple 2.6 La suite $1/(3n^2 + n + 1)$ tend vers zéro car sa valeur absolue est majorée par $1/n$. La suite $u_n = (n + 5)/(n + 2)$ tend vers 1 car

$$0 \leq u_n - 1 = 3/n + 2 \leq 3/n.$$

De même, si on a $v_n \leq u_n$ a.p.c.r. et (v_n) tend vers $+\infty$, alors (u_n) tend vers $+\infty$. Par exemple la suite $v_n = n^2 - 2n$ tend vers $+\infty$ car $v_n \geq n$ si $n \geq 3$.

b) Opérations sur les limites. C'est le critère le plus fréquent. On démontre à partir des définitions le

Theorème 2.7 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que (u_n) tend vers $l \in \mathbf{R}$ et (v_n) tend vers $l' \in \mathbf{R}$. Alors $(u_n + v_n)$ tend vers $l + l'$ et $(u_n v_n)$ vers ll'. Si $l' \neq 0$, la suite (u_n/v_n) tend vers l/l'. Si λ est une constante, la suite (λu_n) tend vers λl.*

Ce théorème se généralise facilement aux suites complexes convergeant vers une limite complexe.

Exemple 2.8 i) La suite $(1 + 1/n)(2 + 3/n^2)$ tend vers 2.

ii) La suite $u_n = \frac{2n^2+3}{n^2+n+7}$ tend vers 2. On a en effet

$$u_n = \frac{(2 + 3/n^2)}{(1 + 1/n + 7/n^2)}$$

ce qui permet de se ramener à une fraction où le numérateur tend vers 2 et le dénominateur vers 1. Le même argument donne que si $P(n)$ et $Q(n)$ sont des polynômes de même degré en n, alors la suite $(P(n)/Q(n))$ tend vers a/b, où a est le coefficient dominant de P et b celui de Q (dans l'exemple, on avait $a = 2$ et $b = 1$).

iii) Soit q un nombre complexe de module < 1. Alors la suite

$$u_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n$$

converge vers $1/(1 - q)$. En effet on a vu que

$$u_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

et l'hypothèse $|q| < 1$ donne que la suite q^{n+1} tend vers 0.

Attention, ce critère ne se généralise pas toujours à des suites tendant vers $+\infty$ ou $-\infty$ à cause des formes indéterminées : si une suite (u_n) tend vers $+\infty$ et (v_n) tend vers $-\infty$, on ne peut a priori rien dire sur $(u_n + v_n)$. De même si (u_n) tend vers $+\infty$) et (v_n) vers zéro, on ne peut rien dire sur $(u_n v_n)$. Il est par contre vrai que si (u_n) tend vers $+\infty$ et (v_n) est minorée (par exemple converge vers un réel), alors $u_n + v_n$ tend vers $+\infty$. De même, si (u_n) tend vers $+\infty$ et (v_n) tend vers un réel $l > 0$, alors $(u_n v_n)$ tend encore vers $+\infty$. On a des énoncés du même genre quand (u_n) tend vers $-\infty$.

Exemple 2.9 La suite $(2 + 1/n)(n + 1)$ tend vers $+\infty$. La suite $(-2 + 1/n)(n + 1)$ tend vers $-\infty$. La suite $n + \sin n$ tend vers $+\infty$.

Les suites $u_n = n$, $v_n = n^2$ et $w_n = n^3$ tendent toutes vers $+\infty$. Pourtant v_n/v_n tend vers 1, v_n/u_n tend vers $+\infty$ et v_n/w_n tend vers 0. Aussi, $v_n - u_n$ tend vers $+\infty$ mais $v_n - w_n$ vers $-\infty$. Il faut donc être très prudent quand on manipule des suites tendant vers $+\infty$ ou $-\infty$.

On a aussi :

Theorème 2.10 *Soit f une fonction continue en $l \in \mathbf{R}$ (la fonction f peut être à valeurs réelles ou complexes). Soit (u_n) une suite qui tend vers l. Alors la suite $(f(u_n))$ tend vers $f(l)$.*

C'est un critère souvent utile quand on manipule des suites définies à partir de fonctions usuelles.

Exemple 2.11 La suite $\cos(1/n)$ tend vers 1.

La suite $e^{1+sin(1/n)}$ tend vers e.

2.3. Critères de convergence ne donnant pas la limite

Il est parfois possible de déterminer qu'une suite converge sans avoir à calculer sa limite. Il existe essentiellement deux critères pour cela.

Suites monotones. On admettra dans ce cours la propriété suivante (pour la démontrer, il faudrait avoir fait une construction rigoureuse de $\mathbf{R}$, ce qui n'est pas au programme des deux première années d'université) :

Theorème 2.12 *Toute suite croissante et majorée de réels est convergente. De même, toute suite décroissante et minorée est convergente.*

Ce critère est surtout très utile pour les suites définies par récurrence. Notons aussi qu'une suite croissante et non majorée (resp. décroissante et non minorée) tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Remarque 2.13 Attention, une suite croissante et majorée par M ne converge pas forcément vers M, on peut juste dire que la limite est $\leq M$ (et $u_n < M$ pour tout n implique seulement que la limite est $\leq M$). Par exemple la suite $u_n = -1/n$ est croissante et majorée par 1, mais c'est vers zéro qu'elle converge. Observer qu'on a $u_n < 0$, mais à la limite l'inégalité devient large.

Exemple 2.14 i) La suite

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$$

est clairement croissante. Pour tout $k > 0$, on a $1/k! \leq 1/2^{k-1}$ (par récurrence sur k) d'où

$$u_n \leq 1 + 1 + 1/2 + ... + 1/2^{n-1} \leq 3,$$

la dernière égalité s'obtenant en observant que

$$1 + 1/2 + ... + 1/2^{n-1} = \frac{(1/2)^n - 1}{(1/2 - 1)} = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} \leq 2.$$

Ainsi la suite u_n est majorée et croissante, donc elle converge. Attention, sa limite n'est pas 3 (c'est e, ce qui peut d'ailleurs être une définition du nombre e).

ii) Considérons la suite définie par récurrence par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1/2(u_n + 2/u_n)$. L'étude de la fonction $f(x) = 1/2(x + 2/x)$ sur $\mathbf{R}_+^*$ donne qu'elle admet un minimum égal à $\sqrt{2}$ en $\sqrt{2}$. En effet la dérivée de f est

$$f'(x) = \frac{1 - 2/x^2}{2} = \frac{x^2 - 2}{2x^2}$$

qui est ≤ 0 pour $x \in]0, \sqrt{2}]$ et ≥ 0 pour $x \geq \sqrt{2}$; ainsi la fonction f est décroissante sur $]0, \sqrt{2}]$, puis croissante sur $[\sqrt{2}, +\infty[$, ce qui montre bien qu'elle atteint un minimum en $\sqrt{2}$ (et de plus le calcul donne $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$).

Ainsi on a $u_n \geq \sqrt{2}$ pour $n \geq 1$, et la suite est minorée. Par ailleurs

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2 - u_n^2}{2u_n},$$

ce qui montre que la suite est décroissante à partir du terme u_1, elle est donc convergente. Si (u_n) tend vers l, alors $u_{n+1} = f(u_n)$ tend aussi vers l, ce qui montre que l doit vérifier $l = f(l)$, ce qui donne $l = \sqrt{2}$. Noter que bien que tous les termes de la suite soient dans $\mathbf{Q}$, la limite ne l'est pas. C'est en ce sens qu'on peut dire que, contrairement à $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$ n'est pas "complet".

Critère de Cauchy. Là encore, c'est un critère qui vient de la structure particulière de $\mathbf{R}$ (sa "complétude").

Theorème 2.15 *Soit (u_n) une suite réelle. Alors elle converge si et seulement si elle vérifie le critère suivant (dit de Cauchy) : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $m \geq n_0$ et $n \geq n_0$, on ait $|u_m - u_n| \leq \varepsilon$.*

Autrement dit, à partir d'un certain rang, la différence entre deux termes peut être rendue aussi petite qu'on veut (au lieu de considérer $u_m - u_n$ pour $m, n \geq n_0$, on peut également considérer $u_{n+p} - u_n$ pour $n \geq n_0$ et $p \in \mathbf{N}$). Ce critère sera surtout utile pour les séries. Il permet aussi de voir qu'une suite n'est pas convergente.

Exemple 2.16 i) La suite

$$u_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - ... + \frac{(-1)^n}{n!}$$

est convergente. En effet, si $m > n$, on a

$$u_m - u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + ... + \frac{(-1)^m}{m!}$$

d'où

$$|u_m - u_n| \leq \frac{1}{(n+1)!} + ... + \frac{1}{m!},$$

ce qui donne

$$|u_m - u_n| \leq \frac{1}{2^n} + ... + \frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

La dernière inégalité s'obtient en observant que

$$\frac{1}{2^n} + ... + \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^n}(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{m-n}}) \leq \frac{1}{2^n}.2 = 2^{n-1}.$$

On en déduit que si on se donne $\varepsilon > 0$, on aure bien $|u_m - u_n| \leq \varepsilon$ dès que m et n dépassent n_0, où on a choisi n_0 tel que $2^{n_0-1} > 1/\varepsilon$. Ainsi le critère de Cauchy est bien vérifié. [2]

ii) La suite

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$$

tend vers $+\infty$ car elle est croissante et ne vérifie pas le critère de Cauchy, vu que $u_{2n} - u_n \leq 1/2$.

[2] Autre méthode (suggérée par une étudiante de ce cours) : montrer que la suite obtenue en n'additionnant que les termes positifs et la suite obtenue en n'additionnant que les termes négatifs sont respectivement croissante majorée et décroissante minorée, donc les deux convergent. SI on remplaçait $(-1)^n$ par z^n avec z nombre complexe quelconque, on serait par contre obligé d'utiliser le critère de Cauchy; voir le chapitre sur les séries...