Math 256-Séries numériques

David Harari

2016-2017

Dans ce chapitre, on va s'intéresser à la convergence des suites du type $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$, où les u_k sont des réels ou des complexes. Nous verrons ultérieurement une notion analogue quand les u_k sont des fonctions.

1. Généralités

1.1. Définitions

Définition 1.1 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels ou complexes. On définit la *suite des sommes partielles* $(S_n)_{n\geq 0}$ de (u_n) par

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Définition 1.2 On dit que *la série* $\sum u_n$ *converge* [1] (ou encore que la *série de terme général* u_n *converge*) si la suite des sommes partielles (S_n) converge. Dans ce cas, on dit que la limite l de la suite (S_n) est la *somme* de la série $\sum u_n$, et on pose $l = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Remarque 1.3 a) On peut bien sûr s'intéresser aussi à des séries $\sum_{n\geq n_0} u_n$, où n_0 est un entier naturel quelconque, en considérant la suite des sommes partielles $\sum_{k=n_0}^n u_k$. Dans ce cas, la limite de cette suite, si elle existe, sera notée $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$. De même, on ne modifie pas la nature (convergente ou divergente) d'une série $\sum u_n$ si on en modifie un nombre fini de termes.

b) On ne confondra pas la convergence de la suite (u_n) avec celle de la série $\sum u_n$.

[1] On notera parfois $\sum_{n\geq 0} u_n$ (ou encore $\sum_{n\geq n_0}$ si la suite (u_n) commence à l'indice n_0) au lieu de $\sum u_n$, pour insister sur le fait que c'est la somme partielle sur l'indice n qu'on considère pour définir S_n. Plus formellement, on pourrait définir la série $\sum u_n$ comme le couple formé des deux suites $((u_n), (S_n))$.

Exemple 1.4 a) On a déjà vu que la série $\sum_{n\geq 1} 1/n$ est divergente.

b) La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente. En effet, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

(les termes se détruisent deux à deux), ce qui montre que la suite des sommes partielles converge vers 1. Ainsi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. Comme on l'avait vu dans le chapitre sur les suites, on en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$ est convergente (la suite de ses sommes partielles étant croissante majorée).

c) Soit q un réel (ou un complexe). Alors la série $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$. En effet, si $q = 1$, il est immédiat que la série diverge (la suite $S_n = \sum_{k=0}^{n} 1^k$ vaut alors $n+1$); si $q \neq 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q},$$

qui converge si et seulement si $|q| < 1$ (en effet, la suite q^n a un module qui tend vers $+\infty$ si $|q| > 1$; et si $|q| = 1$ avec $q \neq 1$, on peut écrire $q = e^{it}$ avec $t \in \mathbf{R}$ non multiple entier de 2π, ce qui montre que la partie réelle $\cos(nt)$ de q^n ne converge pas). Noter que dans ce cas, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

d) La série $\sum_{n\geq 1} \ln(1 + 1/n)$ diverge. En effet, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + 1/k) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1)$$

(c'est encore un exemple de série "téléscopique" comme dans l'exemple b), et la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\ln(n+1)$ est $+\infty$.

Proposition 1.5 *Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors la suite (u_n) tend vers zéro.*

Démonstration : Posons $S_n = \sum_{k=0} u_k$. Si la série est convergente, alors S_n a une limite (réelle ou complexe), disons l. Comme $u_n = S_n - S_{n-1}$, la suite (u_n) converge vers $l - l = 0$.

□

Attention, la réciproque est fausse (par exemple la série $\sum 1/n$ diverge). On fera attention aussi à ne pas confondre la somme d'une série convergente (qui est la limite de la suite $\sum_{k=0}^{n} u_k$, et peut être quelconque) avec la limite de la suite (u_n), qui est toujours nulle si la série $\sum u_n$ converge.

2. Séries à termes positifs

Dans ce paragraphe, on va s'intéresser au cas particulier des séries de la forme $\sum u_n$, où les u_n sont *réels et positifs*. On vérifiera facilement que tous les résultats sont encore valables dès que cette propriété est vraie à partir d'un certain rang (cf. remarque 1.3). On notera aussi les analogies avec les résultat sur les intégrales impropres quand la fonction qu'on intègre est à valeurs dans $\mathbf{R}_+$.

2.1. Comparaison avec une autre série

Proposition 2.1 *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs (c'est-à-dire telle que $u_n \in \mathbf{R}_+$ pour tout n). Alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k$ est majorée.*

Démonstration : L'hypothèse $u_n \geq 0$ donne que la suite (S_n) est croissante. Elle est donc convergente si et seulement si elle est majorée.

□

On en déduit :

Theorème 2.2 *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries. On suppose que pour tout n, on a $0 \leq u_n \leq v_n$. Alors, si la série $\sum v_n$ converge, il en va de même de $\sum u_n$.*

Démonstration : Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. L'hypothèse donne que $S_n \leq S'_n$ donc si S'_n est majorée, S_n est également majorée. On conclut avec la proposition 2.1.

□

Remarque 2.3 Il est suffisant pour appliquer le théorème de supposer qu'on a $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Par contre il est essentiel de travailler avec des séries à termes positifs (au moins a.p.c.r.) : par exemple la série $\sum(-n)$ ne converge pas, alors que $\sum 0$ converge et qu'on a $-n \leq 0$ pour tout n. Avec les hypothèses du théorème, on peut aussi conclure que si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Exemple 2.4 a) pour tout $n \geq 2$, on a $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$. Or la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ converge (c'est une série téléscopique; à un décalage d'indice près, c'est la même que $\sum \frac{1}{n(n+1)}$, dont on a vu qu'elle convergeait). Ainsi $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge. Noter par contre que ce procédé ne permet pas de déterminer la somme de la série $\sum \frac{1}{n^2}$ (dont on verra dans le chapitre sur les séries de Fourier qu'elle est égale à $\pi^2/6$).

b) Pour tout $n \geq 2$, on a $\frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}$. On en déduit que la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln n}$ diverge.

On en déduit aussi :

Theorème 2.5 *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes positifs. On suppose $u_n \sim v_n$ (rappelons si $v_n \neq 0$, cela signifie que u_n/v_n tend vers 1). Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

Démonstration : L' hypothèse $u_n \sim v_n$ (jointe au fait que u_n et v_n sont ≥ 0) donne qu'à partir d'un certain rang, on a

$$0 \leq \frac{v_n}{2} \leq u_n \leq 2v_n.$$

On en déduit le résultat avec le théorème 2.2.

□

Exemple 2.6 La série $\sum \frac{1}{n(1+\frac{\sin n}{\ln n})}$ diverge. En effet la limite de $\frac{\sin n}{\ln n}$ est 0 (parce que $|\frac{\sin n}{\ln n}| \leq \frac{1}{\ln n}$), d'où on déduit facilement, en posant $u_n = \frac{1}{n(1+\frac{\sin n}{\ln n})}$, que $u_n \sim \frac{1}{n}$, ainsi que le fait que $u_n \geq 0$ à partir d'un certain rang. Or, $\sum \frac{1}{n}$ diverge et on conclut avec le théorème précédent.

Exemple 2.7 Attention à bien vérifier qu'on travaille avec des séries à termes positifs (au moins à partir d'un certain rang) avant d'appliquer le critère du théorème 2.5, sinon le résultat peut tomber en défaut. Par exemple, on verra au prochain paragraphe que la série $\sum u_n$ avec $u_n = (-1)^n/\sqrt{n}$ converge. Comme la série $\sum 1/n$ diverge, la série $\sum v_n$ avec $v_n = u_n + 1/n$ ne peut pas converger (sinon $\sum 1/n$ convergerait puisque $1/n = v_n - u_n$). Or on a $u_n \sim v_n$ car $v_n/u_n = 1 + (-1)^n/\sqrt{n}$.

2.2. Comparaison avec une intégrale

Le critère suivant est important, car il est souvent plus facile de calculer une intégrale (via la connaissance d'une primitive de la fonction qu'on intègre) qu'une somme partielle de série. On fera bien attention aux hypothèses du théorème suivant :

Theorème 2.8 *Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbf{R}$ une fonction continue. On suppose que f est décroissante et que $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in [a, +\infty[$. Alors la série $\sum f(n)$ et l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ sont de même nature.*

Remarque 2.9 a) Le théorème 2.8 est intéressant surtout quand la fonction f tend vers 0 vers $+\infty$. Sans cette hypothèse, il est facile de voir que l'intégrale impropre et la série divergent tous deux car la limite de f en $+\infty$ (qui existe puisque f est supposée décroissante et est minorée par 0) est dans ce cas strictement positive, ce qui exclut que la série $\sum f(n)$ converge, puisque son terme général ne tend pas vers zéro.

b) Noter qu'on a noté en abrégé $\sum f(n)$ pour $\sum_{n \geq n_0} f(n)$, où n_0 est un entier $\geq a$.

Preuve du théorème 2.8 : Soit n un entier $\geq a$. On observe que

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq f(n)$$

car pour tout t de $[n, n+1]$, on a $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$ (vu que f est décroissante) et l'intervalle $[n, n+1]$ est de longueur 1. Fixons un entier $n_0 \geq a$. En sommant les inégalités précédentes pour $n = n_0, ..., n$, on obtient avec la relation de Chasles :

$$\sum_{k=n_0+1}^{n+1} f(k) \leq \int_{n_0}^{n+1} f(t)\,dt \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k).$$

Supposons d'abord que $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. Alors la fonction (de la variable x) $\int_{n_0}^{x} f(t)\,dt$ est majorée sur $[n_0, +\infty[$; d'après l'inégalité de gauche ci-dessus, la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=n_0+1}^{n+1} f(k)$ est majorée, donc converge puisque tous les $f(k)$ sont ≥ 0. Ainsi la série $\sum_k f(k)$ converge. Réciproquement supposons que cette série soit convergente. Alors la suite $\sum_{k=n_0}^{n} f(k)$ est majorée, disons par M. Pour tout réel $x \geq a$, il existe alors un entier n avec $n+1 \geq x$ et comme la fonction f est à valeurs positives, on a

$$\int_{n_0}^{x} f(t)\,dt \leq \int_{n_0}^{n+1} f(t)\,dt \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leq M.$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto \int_{n_0}^{x} f(t)\,dt$ est majorée sur $[n_0, +\infty[$, ce qui prouve, comme f est à valeurs positives, que l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,dt$ (et donc aussi $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$) converge.

$\square$

Exemple 2.10 a) La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. En effet le théorème précédent s'applique avec $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ (pour $t \in [1, +\infty[$) et on a vu dans le chapitre sur les intégrales généralisées que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

b) La série $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge. En effet, on applique le théorème à $f : [2, +\infty[\to \mathbf{R}$ définie par $f(t) = \frac{1}{t \ln t}$. Or, pour $x \geq 2$, on a

$$\int_2^x \frac{1}{t \ln t}\, dt = [\ln(\ln t)]_2^x = \ln(\ln x) - \ln(\ln 2),$$

qui diverge quand x tend vers $+\infty$.

c) On voit de même que la série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, en calculant, pour $\alpha \neq 1$:

$$\int_2^x \frac{1}{t(\ln t)^\alpha}\, dt = [\frac{(\ln t)^{1-\alpha}}{1-\alpha}]_2^x = \frac{(\ln x)^{1-\alpha} - (\ln 2)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

3. Séries à termes quelconques

Quand une série est à termes quelconques (réels pas forcément positifs, ou même complexes), il y a beaucoup moins de méthodes générales pour étudier la convergence de la série. Nous allons examiner deux situations favorables : celle où la série *converge absolument* (ce qui est très analogue au cas des intégrales généralisées) et celle des *séries alternées.*

3.1. Convergence absolue

Le théorème suivant donne une condition suffisante de convergence pour une série à termes quelconques. Notons qu'il s'applique aussi bien qu'aux séries à termes réels qu'à celles à termes complexes.

Theorème 3.1 *Soit* $\sum u_n$ *une série de nombres réels ou complexes. On suppose que la série* $\sum |u_n|$ *(qui est, elle, à termes réels positifs) converge. Alors la série* $\sum u_n$ *converge aussi. On dit dans ce cas que* $\sum u_n$ *est absolument convergente.*

Démonstration : On utilise le critère de Cauchy pour la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite $S'_n = \sum_{k=0}^n |u_k|$ converge par hypothèse, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ et tout entier p, on ait :

$$|S'_{n+p} - S'_n| \leq \varepsilon.$$

Ceci s'écrit également

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| \leq \varepsilon,$$

ce qui avec l'inégalité triangulaire permet d'en déduire

$$|S_{n+p} - S_n| = |\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| \leq \varepsilon.$$

Ainsi la suite des sommes partielles (S_n) de la série $\sum u_n$ est de Cauchy, donc converge.

□

Remarque 3.2 Nous verrons au prochain paragraphe qu'une série peut converger sans converger absolument. Le théorème précédent ne donne donc qu'une condition suffisante de convergence.

Exemple 3.3 a) La série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n^2}$ converge absolument, car $|\ \frac{\sin n}{n^2}\ | \leq \frac{1}{n^2}$, et on conclut par comparaison puisque $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

b) Soit $t \in \mathbf{R}$. La série (à termes complexes) $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{int}}{n^2}$ converge absolument car le module $|\frac{e^{int}}{n^2}|$ de $\frac{e^{int}}{n^2}$ est $\frac{1}{n^2}$.

c) Soit z un nombre complexe fixé. Alors la série $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument. Posons en effet $v_n = |\frac{z^n}{n!}| = \frac{|z|}{n!}$. Alors $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{|z|}{n+1}$ tend vers 0, ce qui permet d'écrire qu''a partir d'un certain rang n_0, on a

$$0 \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{1}{2},$$

et par récurrence sur n, on obtient, pour tout $n \geq n_0$:

$$0 \leq v_n \leq v_{n_0}(\frac{1}{2})^{n-n_0},$$

ce qui montre que la série à termes réels positifs $\sum v_n$ est convergente. La définition correcte de l'exponentielle $\exp z = e^z$ d'un nombre complexe z est en fait précisément de poser :

$$\exp z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + ...$$

On peut alors, pour tour réel t, définir $\cos t$ et $\sin t$ respectivement comme la partie réelle et la partie imaginaire de $\exp(it)$. On démontre alors (ce n'est pas facile et dépasse le cadre de ce cours) qu'il existe un plus petit réel strictement positif T tel que $\exp(iT) = 1$, et le nombre π est alors défini par $\pi = T/2$.

3.2. Séries alternées

Nous revenons dans ce paragraphe à des séries à termes réels, pas forcément positifs.

Définition 3.4 Une *série alternée* est une série de la forme $\sum(-1)^n v_n$ ou $\sum(-1)^{n+1} v_n$, où les v_n sont des réels positifs.

En d'autres termes, il s'agit de séries dont les termes pairs sont positifs et les termes impairs négatifs, ou vice-versa.

Theorème 3.5 *Soit $\sum(-1)^n v_n$ une série alternée. On suppose que la suite (v_n) et décroissante et converge vers* 0*. Alors la série $\sum(-1)^n v_n$ converge.*

Démonstration : Posons $u_n = (-1)^n v_n$. Soit $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ la suite des sommes partielles. On observe que la suite des termes pairs

$$S_{2n} = v_0 - v_1 + v_2 - ... + v_{2n}$$

est décroissante car $S_{2n+2} - S_{2n} = v_{2n+2} - v_{2n+1} \leq 0$, vu que la suite (v_n) est supposée décroissante. De plus $S_{2n} = (v_0 - v_1) + (v_2 - v_3) + ... + v_{2_n}$ est positive comme somme de termes qui (toujours parce que (v_n) est décroissante et positive) sont positifs. Ainsi la suite (S_{2n}) est minorée, et elle converge donc vers une limite $l \in \mathbf{R}$. De même:

$$S_{2n+1} = v_0 + (-v_1 + v_2) + ... + (-v_{2n-1} + v_{2n}) - v_{2n+1}$$

est majorée par v_0, et comme $S_{2n+3} - S_{2n+1} = v_{2n+2} - v_{2n+3} \geq 0$, on obtient que (S_{2n+1}) est une suite croissante. Ainsi (S_{2n+1}) converge vers une limite l'. Il suffit maintenant de montrer que $l = l'$. Or $S_{2n+1} - S_{2n} = -v_{2n+1}$ tend vers 0 par hypothèse, donc $l' - l = 0$, ce qui donne bien $l = l'$.

$\square$

Remarque 3.6 Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont *adjacentes*, c'est-à-dire que l'une est décroissante minorée, l'autre est croissante majorée, et la différence des deux tend vers 0. Dans ce cas, les deux suites convergent vers une même limite.

Exemple 3.7 La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, ainsi que les séries $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{\ln n}$. Noter qu'elles ne sont pas absolument convergentes (cf. exemple 2.4). Ainsi la réciproque du théorème 3.1 est fausse.

Dans le cas des séries alternées, on a une information plus précise sur la vitesse de convergence, via la notion suivante :

Définition 3.8 Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série convergente. On appelle *reste* de cette série la suite (R_n) définie par

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k := \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Le reste de la série s'obtient donc en retranchant sa somme partielle à sa somme. Bien noter que cette notion n'a pas de sens pour une série divergente.

Proposition 3.9 *Soit $\sum_{n\geq 0} u_n = \sum_{n\geq 0}(-1)^n v_n$ une série alternée vérifiant les hypothèses du théorème 3.5. Alors le reste R_n vérifie $|R_n| \leq v_n$ pour tout $n \geq 0$.*

Intuitivement, cela signifie que la série $\sum u_n$ converge au moins aussi vite que la suite (v_n) tend vers 0.

Démonstration : On observe que

$$R_{2n} = (-v_{2n+1} + v_{2n+2}) + (-v_{2n+3} + v_{2n+4}) + ...$$

est négatif (comme somme de termes négatifs), mais on a aussi

$$R_{2n} = -v_{2n+1} + (v_{2n+2} - v_{2n+3}) + ...,$$

ce qui montre que $R_{2n} \geq -v_{2n+1}$. Ainsi

$$|R_{2n}| \leq v_{2n+1} \leq v_{2n}.$$

On montre de même que $0 \leq R_{2n+1} \leq v_{2n+2}$, d'où $|R_{2n+1}| \leq v_{2n+2} \leq v_{2n+1}$. Finalement on a bien $|R_n| \leq v_n$ pour tout $n \geq 0$.

□

4. Produit de Cauchy de deux séries

Cette notion est un peu délicate. Nous avons tenu néanmoins à la faire figurer, car d'une part elle permet de montrer des égalités intéressantes entre sommes de séries (voir l'exemple ci-dessous), d'autre part on en verra un analogue avec les intégrales, le *produit de convolution* de deux fonctions.

L'idée est la suivante. Étant donné deux séries convergentes $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$, on dispose des sommes infinies

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = a_0 + a_1 + ... + a_k + ...$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k = b_0 + b_1 + ... + b_k + ...$$

et on a envie de "multiplier les deux sommes infinies" en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, comme si ces deux sommes étaient finies. La difficulté est de dire ensuite comment on regroupe les différents termes $a_i b_j$. Une idée naturelle est de le faire en les triant suivant la somme $i + j$, ce qui donnerait pour le produit des deux sommes infinies :

$$(a_0 b_0) + (a_1 b_0 + a_0 b_1) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + ...$$

Cette observation est à l'origine de la définition suivante :

Définition 4.1 Soient $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ deux séries de nombres réels ou complexes. On appelle *série produit* (souvent appelée "produit de convolution" ou "produit de Cauchy" des deux séries) la série $\sum_{n\geq 0} c_n$, où c_n est défini par

$$c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

L'intérêt réside dans le théorème suivant (dont on ne donnera pas de démonstration; l'idée est de montrer que la différence entre la somme partielle de la série $\sum c_n$ et le produit des sommes partielles des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ tend vers 0, via l'hypothèse que les deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont *absolument* convergentes) :

Theorème 4.2 *On suppose que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes. Alors la série produit $\sum c_n$ est absolument convergente, et on a l'égalité*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n).$$

Voici un exemple d'application particulièrement important :

Exemple 4.3 Pour tout nombre complexe z, on a défini son exponentielle

$$\exp z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!},$$

somme d'une série absolument convergente. Soient alors z_1, z_2 des nombres complexes. Posons $a_n = \frac{z_1^n}{n!}$ et $b_n = \frac{z_2^n}{n!}$. Le produit de Cauchy $\sum c_n$ de $\sum a_n$ et $\sum b_n$ est la série donnée par

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k z_2^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k z_1^k z_2^{n-k},$$

où $C_n^k := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ est le coefficient binômial. La formule du binôme de Newton dit alors que $c_n = \frac{1}{n!}(z_1 + z_2)^n$. Le théorème 4.2 donne donc

$$\exp(z_1 + z_2) = (\exp z_1)(\exp z_2).$$

C'est ainsi qu'on démontre cette formule fondamentale, de laquelle découlent toutes les formules d'addition classiques en trigonométrie, puisque pour tout réel t on définit $\cos t$ et $\sin t$ respectivement comme la partie réelle et la partie imaginaire de $\exp(it)$.