Math 256-Séries entières

David Harari

2016-2017

Dans ce chapitre, on va considérer des séries de fonctions d'un type particulier, appelées séries entières. En particulier, on va voir qu'il est possible de dire assez précisément sur quels types d'ensembles ces séries convergent, et de plus d'avoir de bonnes propri'etés de la somme de la série (dérivabilité notamment).

1. Définition, rayon de convergence

Définition 1.1 Une *série entière* est une série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$, où $z \in \mathbf{C}$ est la variable et les a_n sont des nombres complexes.

On peut bien entendu aussi considérer une série entière comme une série de fonctions où la variable z est réelle.

Exemple 1.2 Nous avons déjà rencontré la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$, qui converge pour tout $z \in \mathbf{C}$ avec $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$. On aussi vu que la série entière $\sum_{n \geq 0} z^n$ convergeait pour $|z| < 1$, et on a dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Un phénomène spécifiques aux séries entières est que la convergence de la série est étroitement liée au module du nombre complexe z. Tout repose sur le lemme suivant :

Lemme 1.3 (Lemme d'Abel) *Soit $r_0 \in \mathbf{R}_+^*$ tel que la suite $(a_n r_0^n)$ soit bornée. Alors la série $\sum a_n z^n$ converge pour tout nombre complexe z tel que $|z| < r_0$. Plus précisément, si r est un réel avec $0 < r < r_0$, la série converge normalement (et donc uniformément) sur le disque $|z| \leq r$. En particulier, si on se limite à une variable z réelle, la série converge normalement sur tout intervalle fermé $[a, b]$ inclus dans $]-r_0, r_0[$.*

Démonstration : Rappelons que dire que la suite $(a_n r_0^n)$ est bornée signifie qu'il existe une constante réelle M telle que $|a_n r_0^n| \leq M$ pour tout n. On a alors

$$|a_n z^n| \leq M(\frac{|z|}{r_0})^n \leq M(\frac{r}{r_0})^n$$

pour tout nombre complexe z tel que $|z| \leq r$. Comme $0 < (\frac{r}{r_0}) < 1$ par hypothèse, la série à termes réels positifs $\sum(\frac{r}{r_0})^n$ converge, donc aussi $\sum M(\frac{r}{r_0})^n$. Ceci montre que la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur le disque défini par $|z| \leq r$.

□

On en déduit la définition suivante :

Définition 1.4 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On appelle *rayon de convergence* R de la série l'élément de $[0, +\infty]$ défini comme la borne supérieure des réels $r \geq 0$ tels que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée.

En particulier $R = +\infty$ signifie que la suite $(a_n r^n)$ est bornée pour tout $r \in \mathbf{R}_+$, et $R = 0$ signifie qu'elle n'est bornée que pour $r = 0$.

Theorème 1.5 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors si $|z| < R$ la série converge, et si $|z| > R$, la série diverge. De plus, la convergence est normale sur tout disque fermé $|z| \leq r$ avec $0 < r < R$.*

Démonstration : Si $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée par définition du rayon de convergence, donc elle ne tend pas vers zéro et a fortiori, la série diverge. Soit maintenant z un nombre complexe tel que $|z| < R$. Par définition de la borne supérieure, il existe r_0 tel que $|z| < r_0$ et la suite $(a_n r_0^n)$ soit bornée. Le lemme d'Abel dit alors que la série $\sum a_n z^n$ converge absolument. En particulier, si $0 < r < R$, la série $\sum |a_n| r^n$ converge, d'où la convergence normale sur le disque $|z| \leq r$.

□

Deux cas particuliers méritent d'être détaillés : si $R = 0$, la série ne converge que pour $z = 0$. Si $R = +\infty$, elle converge pour tout nombre complexe z. On va aussi voir que pour $|z| = R$, on ne peut en général rien dire sur la convergence de la série.

Exemple 1.6 a) La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$. En effet, on a déjà vu qu'elle convergeait pour tout nombre complexe z. Si x est un réel, on déduit de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$$

les égalités :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... \quad \text{et } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} ...$$

b) La série entière $\sum z^n$ a pour rayon de convergence 1, car la suite (z^n) est bornée si et seulement si $|z| \leq 1$. Noter qu'ici, si $|z| = 1$, la série $\sum z^n$ ne converge jamais (en effet, son terme général ne tend pas vers zéro).

c) La série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ a pour rayon de convergence 1. En effet, si $|z| > 1$, la suite $|\frac{z^n}{n^2}|$ tend vers $+\infty$ donc la série ne peut pas converger pour un tel z; si au contraire $|z| \leq 1$, on a $|\frac{z^n}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$, donc la série converge absolument par comparaison. Noter qu'ici, contrairement à l'exemple précédent, la série converge en tout z dont le module est égal au rayon de convergence.

d) La série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$ a encore 1 comme rayon de convergence, mais noter qu'elle diverge pour $z = 1$ et converge pour $n = -1$ (avec le critère des séries alternées), ces deux faits montrant d'ailleurs que le rayon de convergence est bien 1 via le théorème 1.5 (puisque 1 et -1 ont tous deux pour module 1).

e) La série $\sum n! z^n$ a pour rayon de convergence 0 car si $z \neq 0$, la suite $|n! z^n|$ tend vers $+\infty$.

f) Si a est un réel strictement positif, la série entière $\sum \frac{z^n}{a^n}$ a pour rayon de convergence a (preuve similaire à l'exemple b).

2. Opérations sur les séries entières

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. On définit la *série entière somme* comme la série $\sum (a_n + b_n) z^n$. Si $z \in \mathbf{C}$ est tel que $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent, il est immédiat que la série entière somme converge aussi en z. On en déduit

Theorème 2.1 *Soient R_1, R_2 les rayons de convergence respectifs des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. Alors le rayon de convergence R de la série entière somme vérifie $R \geq \min(R_1, R_2)$ et on a pour tout z tel que $|z| < R$:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Noter que R peut être strictement plus grand que $\min(R_1, R_2)$, par exemple si $a_n = n!$ et $b_n = -n!$, on a $R_1 = R_2 = 0$ mais $R = +\infty$ car la série entière somme a tous ses termes nuls, donc converge pour tout z. On vérifiera (exercice) que si par exemple $R_1 > R_2$, alors le rayon de convergence de la série somme est exactement R_2.

Pour définir la série produit de deux séries entières, l'opération est plus compliquée que simplement multiplier terme à terme, car on veut une série qui converge vers $(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n)(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n)$. On utilise donc le produit de convolution de Cauchy (noter aussi l'analogie avec la convolée de deux fonctions, vue dans le chapitre sur les séries de Fourier). Plus précisément :

Définition 2.2 Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. La *série entière produit* est la série $\sum c_n z^n$, avec

$$c_n := \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Le théorème sur le produit de Cauchy de deux séries donne alors

Theorème 2.3 *Soient R_1, R_2 les rayons de convergence respectifs des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. Alors le rayon de convergence R de la série entière produit $\sum c_n z^n$ vérifie $R \geq \min(R_1, R_2)$ et on a pour tout z tel que $|z| < R$:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n).(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n).$$

3. Calculs de rayon de convergence

Il n'y a pas toujours de recette miracle pour calculer le rayon de convergence d'une série entière. Néanmoins, la connaissance de quelques principes et règles est très utile. Le critère le plus général résulte de la définition et du théorème 1.5 : on peut regarder le sup des réels $r \geq 0$ tels que la suite $(a_n r^n)$, ou encore la suite à termes réels positifs $(|a_n| r^n)$, soit bornée; on note aussi que si la série $\sum a_n z^n$ converge pour $|z| < R$ et diverge pour $|z| > R$, alors le rayon de convergence est R. Voici maintenant deux critères plus calculatoires :

Proposition 3.1 (Règle d'Hadamard) *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière avec $a_n \in \mathbf{C}$. On fait l'hypothèse que la suite à termes positifs $|a_n|^{1/n}$ tend vers $a \in [0, +\infty]$. Alors le rayon de convergence de la série entière est $1/a$ (on convient ici que $1/0 = +\infty$ et $1/+\infty = 0$).*

Démonstration : Soit $r < 1/a$, ou encore $1/r > a$. Alors à partir d'un certain rang $|a_n|^{1/n} \leq 1/r$, donc $|a_n r^n| \leq 1$ et la suite $(a_n r^n)$ est donc bornée. Si par contre $r > 1/a$, alors $1/r < a$. Choisissons b avec $1/r < b < 1/a$. Alors à partir d'un certain rang $|a_n|^{1/n} \geq b$, d'où $|a_n r^n| \geq (br)^n$ avec $br > 1$, ce qui montre que la suite $(a_n r^n)$ n'est pas bornée. On conclut avec la définition du rayon de convergence.

□

Proposition 3.2 (Règle de d'Alembert) *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière. On fait l'hypothèse qu'à partir d'un certain rang* $a_n \neq 0$*, et que la suite* $|a_{n+1}/a_n|$ *tend vers* a*. Alors le rayon de convergence est* $1/a$*.*

Attention à l'hypothèse $a_n \neq 0$ *à partir d'un certain rang*, cette règle ne marche pas pour les séries lacunaires du type $\sum n! z^{2n}$.

Démonstration (esquisse): C'est le même principe que pour la règle d'Hadamard. Si par exemple $r < 1/a$, alors $1/r > a$ et à partir d'un certain rang n_0, on a $|a_{n+1}/a_n| \leq 1/r$, ce qui montre que la suite à termes réels positifs $|a_n| r^n$ est décroissante, à partir d'un certain rang donc majorée. Si $r > 1/a$, on minore de même $|a_n| r^n$ par une suite géométrique de raison > 1 (qui tend donc vers $+\infty$) a.p.c.r.

□

4. Propriétés de la somme d'une série entière

Si une série entière a un rayon de convergence $R > 0$, on peut en particulier définir une fonction sur $]-R, R[$ en considérant sa somme. Les séries entières ont la particularité que sur cet intervalle ouvert, la fonction obtenue est toujours dérivable, et même C^∞. Plus précisément :

Theorème 4.1 *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$*. Soit* f *la fonction de la variable réelle*[1] x *définie, pour* $x \in]-R, R[$*, par*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

[1]Nous nous limitons ici à x réel, car on n'a pas vraiment défini ce qu'est la dérivée d'une fonction d'une variable complexe; ceci dit tout marcherait pareil en prenant x dans $\mathbf{C}$.

Alors la fonction f est dérivable sur $]-R,R[$ et sa dérivée s'obtient en dérivant la série terme à terme, c'est-à-dire que

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n.$$

Démonstration : D'après un critère vu dans le chapitre sur les séries de fonctions, il suffit de voir que pour tout réel r avec $0<r<R$, la série dérivée $\sum(n+1)a_{n+1}x^n$ converge uniformément sur $[-r,r]$. Soit donc r un tel nombre. D'après la définition du rayon de convergence, il existe alors r_1 avec $r<r_1\leq R$ tel que la suite $(a_n r_1^n)$ soit bornée; ceci implique l'existence d'un réel $M>0$ tel que $|a_{n+1}r_1^n|\leq M$ pour tout n. On a alors

$$|(n+1)a_{n+1}x^n|\leq (n+1)M(\frac{r}{r_1})^n$$

pour tout $x\in[-r,r]$. Comme $0<\frac{r}{r_1}<1$, la série $\sum(n+1)M(\frac{r}{r_1})^n$ converge, ce qui montre que la série $\sum(n+1)a_{n+1}x^n$ converge normalement (et donc uniformément) sur $[-r,r]$.

□

Corollaire 4.2 *Avec les notations du théorème 4.1, la fonction f est C^∞ sur $]-R,R[$ et ses dérivées successives s'obtiennent en dérivant successivement la série terme à terme.*

Démonstration : La série dérivée $\sum(n+1)a_{n+1}x^n$ converge pour $x\in\,]-R,R[$, donc son rayon de convergence est au moins R (il est en fait facile de voir avec le lemme d'Abel que c'est exactement R). On applique alors le théorème 4.1 à cette série dérivée, ce qui montre que la fonction f' est dérivable de dérivée la série entière dérivée de $\sum(n+1)a_{n+1}x^n$. Il suffit alors d'itérer le processus.

□

Remarque 4.3 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Soit $[a,b]$ un intervalle fermé avec $[a,b]\subset]-R,R[$. Comme on a vu (lemme d'Abel) que la série convergeait uniformément sur $[a,b]$, on obtient :

$$\int_a^b(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n t^n)\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}[a_n\frac{t^{n+1}}{n+1}]_a^b,$$

c'est-à-dire que pour calculer l'intégrale de $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ sur un intervalle fermé inclus dans $]-R, R[$, on peut intégrer terme à terme. Par exemple, on a, pour tout $t \in]-1, 1[$:

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$$

d'où on déduit, en intégrant sur $[0, x]$, que pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

5. Fonctions développables en série entière

Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ (ou encore à valeurs complexes). Comme on l'a vu, les fonctions qui s'écrivent comme somme d'une série entière ont de bonnes propriétés, au moins au voisinage de 0 (plus précisément sur $]-R, R[$, où R est le rayon de convergence). Cela amène la définition suivante :

Définition 5.1 On dit qu'une fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est *développable en série entière au voisinage de* 0 s'il existe un réel $R > 0$ et une suite (a_n) (indépendante de x) telle que pour tout $x \in]-R, R[$, on ait

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Le corollaire 4.2 donne :

Theorème 5.2 *Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une fonction développable en série entière sur $]-R, R[$. Alors on a $a_0 = f(0)$, $a_1 = f'(0)$, et plus généralement $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.*

Ainsi, une fonction développable en série entière au voisinage de 0 est C^∞ sur un intervallle du type $]-R, R[$ avec $R > 0$. Malheureusement, la réciproque n'est pas vraie comme va le montrer l'exemple suivant.

Exemple 5.3 Soit f la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Pour tout $x \neq 0$, on a $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$ et on montre par récurrence sur k que la dérivée k-ième de f s'écrit

$$f^{(k)}(x) = P(x) e^{-\frac{1}{x^2}},$$

où P est un polynôme. On en déduit en particulier que $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout k. Si f était développable en série entière au voisinage de 0, elle serait donc identiquement nulle sur un intervalle du type $]-R, R[$ (avec $R > 0$) d'après le théorème 5.2, ce qui n'est pas le cas car $f(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$.

Une fonction C^∞ est néanmoins développable en série entière dès qu'on peut borner ses dérivées k-ièmes sur un intervalle $]-R, R[$ indépendamment de k. Plus précisément, on déduit de la formule de Taylor-Lagrange l'énoncé suivant :

Theorème 5.4 *Soit f une fonction C^∞ sur $\mathbf{R}$ (ou plus généralement au voisinage de 0). On suppose qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $x \in]-R, R[$ et pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on ait*

$$|f^{(k)}(x)| \leq k! M_1 M_2^k,$$

où M_1 et M_2 sont des constantes. Alors f est développable en série entière au voisinage de 0.

La plupart des fonctions usuelles satisfont ce critère. Noter toutefois que même si la fonction est C^∞ sur $\mathbf{R}$, le développement en série entière n'est valable en général qu'au voisinage de 0. Par exemple l'égalité

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

ne vaut que pour $|x| < 1$, bien que la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ soit C^∞ sur $\mathbf{R}$ tout entier.

Remarque 5.5 Au lieu de considérer des fonctions développables en séries entières au voisinage de 0, on peut considérer des fonctions développables en séries entières au voisinage de n'importe quel $x_0 \in \mathbf{R}$. Ce sont par définition les fonctions qui peuvent s'écrire au voisinage de x_0 sous la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

où (a_n) est une suite. Pour une telle fonction, on a l'analogue du théorème 5.2 sous la forme $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ pour tout k. On a aussi l'analogue du théorème 5.4 pour les fonctions C^∞ au voisinage de x_0 dont on peut majorer les dérivées sur un intervalle de la forme $]x_0 - R, x_0 + R[$ avec $R > 0$.