Partiel du 11 mars 2015

Durée 2 heures - Documents et matériel électronique interdits
Barème indicatif : 2/4/6/10. Rendre les exercices 0+1, 2 et 3 sur des copies séparées.

0. Questions de cours

Répondre par oui ou par non en donnant une courte justification ou un contre-exemple.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dérivables définies sur un intervalle I.

1– On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I. Est-ce que cela entraîne que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement absolument sur I ?

2– On suppose que la suite de fonctions f_n converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f. Est-ce que cela entraîne que f est dérivable sur $\mathbb{R}$?

Solution :

1– NON. Posons par exemple $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$. Alors $\sum f_n$ converge uniformément vers une fonction constante. Elle converge aussi simplement. En revanche, elle ne converge pas absolument, puisque la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

2– NON. On a vu un exemple en cours, la suite de fonctions définies par $f_n(x) = \frac{1}{n}\ln(1+x^n)$ sur $[0,+\infty[$. Elle converge uniformément vers la fonction qui vaut 0 sur $[0,1]$ et $\ln(x)$ sur $[1,+\infty[$. La limite f n'est pas dérivable. Un autre exemple est la série de Fourier du signal triangulaire. Enfin, l'exercice 3 ci-dessous contient encore un exemple.

1. Intégrales généralisées

1– L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{\sqrt{t}-t}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

2– L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{t+e^{-t}}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

Solution :

1– Notons $f(t) = \frac{1-t}{\sqrt{t}-t}$ l'intégrand. Il est positif et continu sur $]0,1[$. Posons $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$. A la borne 0,

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{1-t}{1-\sqrt{t}}$$

tend vers 1. Comme $-\frac{1}{2} < -1$, $\int_0 g(t)\,dt$ est convergente, donc $\int_0 f(t)\,dt$ l'est aussi.

A la borne 1, comme la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable, de dérivée $\frac{1}{2}$,

$$\frac{\sqrt{t}-1}{t-1} \to \frac{1}{2},$$

donc $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\dfrac{t-1}{\sqrt{t}-1}$ tend vers 2. Comme $\int^1 2\,dt$ est convergente à la borne 1, il en est de même de $\int^1 f(t)\,dt$. On conclut que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{\sqrt{t}-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

On peut aussi remarquer que

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1-t}{\sqrt{t}-t} = \frac{(1+\sqrt{t})(1-\sqrt{t})}{\sqrt{t}(1-\sqrt{t})} \\ &= \frac{1+\sqrt{t}}{\sqrt{t}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{t}}, \end{aligned}$$

cela simplifie la discussion précédente.

2– La fonction continue positive $t \mapsto \sqrt{t+e^{-t}}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, elle domine la fonction constante 1, dont l'intégrale diverge à la borne $+\infty$, donc l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{t+e^{-t}}\,\mathrm{d}t$ est divergente.

2. Séries numériques

Donner et justifier la nature (convergente ou divergente) des séries numériques $\sum_n u_n$, $\sum_n v_n$ et $\sum_n w_n$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies par:

$$u_n = \frac{n^2+\ln(n)}{n^4+1}, \quad v_n = \frac{2^n+n}{5^n-n^3}, \quad w_n = (-1)^n\frac{n^2+1}{n^2+\ln(n)}.$$

Solution :

1– Dans l'expression de $u_n = \frac{n^2+\ln(n)}{n^4+1}$, le terme n^2 domine au numérateur, le terme n^4 domine au dénominateur. On compare donc u_n à $u'_n = \frac{1}{n^2}$,

$$\frac{u_n}{u'_n} = \frac{1+\frac{\ln(n)}{n^2}}{1+\frac{1}{n^4}}$$

tend vers 1. Comme $u_n > 0$ et $\sum u'_n = \sum \frac{1}{n^2}$ converge, il en est de même de $\sum u_n$.

2– Dans l'expression de $v_n = \frac{2^n+n}{5^n-n^3}$, le terme 2^n domine au numérateur, le terme 5^n domine au dénominateur. On compare donc v_n à $v'_n = \frac{2^n}{5^n}$,

$$\frac{v_n}{v'_n} = \frac{1+\frac{n}{2^n}}{1-\frac{n^3}{5^n}}$$

tend vers 1. Comme $v_n > 0$ et $\sum v'_n = \sum(\frac{2}{5})^n$ converge, il en est de même de $\sum v_n$.

3– On remarque que

$$|w_n| = \frac{n^2+1}{n^2+\ln(n)} = \frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{\ln(n)}{n^2}}$$

tend vers 1. Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Ce n'est pas le cas pour w_n, donc la série $\sum w_n$ est divergente.

3. Suite de fonctions, série de fonctions

Soit $\alpha \geq 0$. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x on pose

$$f_n(x) = \frac{1}{n^\alpha}\sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}.$$

1. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
   1– Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Quelle est sa limite ?
   2– Montrer que la suite des fonctions dérivées $(f'_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Quelle est sa limite ?
   3– La suite de fonctions $(f'_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?
2. On suppose dans cette question que $\alpha > 0$.
   1– A quelle condition sur α la série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$?
   2– Lorsque c'est le cas, montrer que la série des dérivées $\sum f'_n$ converge aussi simplement sur $\mathbb{R}$.
   3– Montrer que, dans ce cas, la série de fonctions $\sum f'_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
   4– Que peut-on en déduire pour la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}\sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}$?
3. A quelle condition sur α la série de fonctions $\sum (-1)^n f_n$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$?

Solution :

1. Cas où $\alpha = 0$.
   1– Par continuïté de la fonction racine carrée, lorsque n tend vers l'infini, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x)$ tend vers $\sqrt{x^2} = |x|$. Il y a donc convergence simple. Pour étudier la convergence uniforme, on majore

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - |x|| &= \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2} - \sqrt{x^2} \\
&= \frac{\frac{1}{n^2} + x^2 - x^2}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2} + \sqrt{x^2}} \\
&\leq \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}}} \\
&= \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser l'inégalité, pour $a > 0$, $b > 0$,

$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b,$$

qui donne directement

$$\sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2} - |x| \leq \frac{1}{n}.$$

Comme le majorant est indépendant de $x \in \mathbb{R}$ et tend vers 0 quand n tend vers l'infini, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $|x|$.

2– Soit $x \in \mathbb{R}$. On calcule

$$f_n'(x) = \frac{1}{2} 2x \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}}.$$

A $x \neq 0$ fixé, la limite quand n tend vers $+\infty$ est $\frac{x}{|x|}$. Si $x = 0$, $f_n'(0) = 0$. La suite de fonctions $(f_n')_{n\geq 1}$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction sgn, qui vaut

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

3– NON, la suite de fonctions $(f_n')_{n\geq 1}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$. Si c'était le cas, un théorème du cours garantirait que la limite est dérivable, ce qui n'est pas vrai.

2. Cas où $\alpha > 0$.

1– Si $x \neq 0$, dans la somme $\frac{1}{n^2} + x^2$, c'est la constante x^2 qui domine. Par conséquent, si on pose $u_n = \frac{|x|}{n^\alpha}$,

$$\frac{f_n(x)}{u_n} \to 1.$$

Comme $f_n(x) > 0$, la série $\sum f_n(x)$ est convergente si et seulement si $\sum u_n$ l'est, i.e. si et seulement si $\alpha > 1$. Si $x = 0$, $f_n(0) = \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ donc $\sum f_n(0)$ est convergente dès que $\alpha > 0$. On conclut que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha > 1$.

2– On suppose que $\alpha > 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = \frac{x}{n^\alpha \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}}.$$

Si $x \neq 0$, c'est le terme x^2 qui domine au dénominateur. On pose $u_n' = \frac{sgn(x)}{n^\alpha}$. Alors

$$\frac{f_n'(x)}{u_n'} \to 1.$$

Comme $f_n'(x)$ garde un signe constant quand n varie, et comme $\sum u_n'$ est convergente, $\sum f_n'(x)$ est convergente. Si $x = 0$, $f_n'(0) = 0$ donne aussi une série convergente. On conclut que la série des dérivées $\sum f_n'$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

3– Pour étudier la convergence normale, on majore

$$\begin{aligned} |f_n'(x)| &= \frac{|x|}{n^\alpha \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}} \\ &\leq \frac{|x|}{n^\alpha \sqrt{x^2}} = \frac{1}{n^\alpha}, \end{aligned}$$

quantité indépendante de x et donnant une série convergente. On conclut que la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

4– D'un théorème du cours, il résulte que la somme de la série $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

3. Si $\alpha = 0$ et $x \neq 0$, le terme général de la série ne tend pas vers 0, donc la série diverge.

Supposons $\alpha \neq 0$. Si $x \neq 0$, la suite $\frac{1}{n^2}$ est décroissante. Il en est de même de $\frac{1}{n^2} + x^2$. Comme la fonction racine carrée est croissante, la suite $n \mapsto \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}$ est décroissante. Le produit de deux suites décroissantes positives est décroissant. Par conséquent, la suite $n \mapsto f_n(x)$ est décroissante. Comme $\alpha > 0$, cette suite tend vers 0. Le théorème des séries alternées s'applique : la série de terme général $(-1)^n f_n(x)$ est convergente.

Si $x = 0$, la série de terme général $(-1)^n f_n(0) = (-1)^n \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ est absolument convergente donc convergente.

On conclut que la série de fonctions $\sum (-1)^n f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha > 0$.