Math 256-Intégrales

David Harari

2016-2017

1. Intégrale d'une fonction continue

1.1. Rappels et définitions

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ de $\mathbf{R}$. Il y a plusieurs façons de définir l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$. La plus intuitive est de voir l'intégrale comme limite d'une somme. Historiquement, la notion d'intégrale a été inventée pour calculer, quand f est à valeurs positives, l'aire de la portion de plan

$$\{(x,y), x \in [a,b], 0 \leq y \leq f(x)\},$$

c'est-à dire celle comprise entre l'axe des abscisses et le graphe de f. Quand f est à valeurs négatives, on affecte cette aire d'un signe moins. Du coup, la somme dont l'intégrale va être la limite s'obtient en partageant $[a,b]$ en intervalles de plus en plus petits et en calculant l'aire comme ci-dessus en approximant f sur chacun de ces petits intervalles par sa valeur en l'une des bornes. Plus précisément, cela donne le théorème suivant (dont on ne donnera pas ici de démonstration, la théorie complète de l'intégrale de Riemann dépassant le cadre de ce cours) :

Theorème 1.1 *Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ (ou dans $\mathbf{C}$). Posons $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ (pour $k = 0, ..., n$; ainsi les x_k subdivisent l'intervalle $[a,b]$ en n segments d'égale longueur $(b-a)/n$). Alors la suite*

$$v_n := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

converge. On appelle intégrale de f de a à b sa limite, qu'on note $\int_a^b f(x)dx$, ou simplement $\int_a^b f$.

Noter que dans la notation $\int_a^b f(x)dx$, la lettre x est "muette" (elle sert juste à indiquer par rapport à quelle variable on intègre), on pourrait la remplacer par n'importe quelle lettre comme t ou u. En particulier, si on calcule une intégrale du type $\int_a^b f(x,t)dx$, où f est une fonction de deux variables x et t, le résultat va être une fonction de t *et non pas de* x.

Noter aussi que la définition est aussi valable pour des fonctions *en escalier*, c'est-à-dire telles qu'il existe une subdivision de $[a,b]$ en un nombre fini d'intervalles (I_i) avec f constante sur chacun de ces intervalles. Dans ce cas, l'intégrale est facile à calculer, c'est simplement la somme finie $\sum_i c_i l_i$, où l_i est la longueur de l'intervalle I_i et c_i la valeur de f sur I_i.

1.2. Propriétés

a) **Relation de Chasles**. Si c est un point de $[a,b]$, on voit facilement avec la définition que

$$\int_a^a f(t)dt = 0; \quad \int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Avec la convention

$$\int_a^b f(t)dt := -\int_b^a f(t)dt$$

si $a > b$, on voit que cette relation de Chasles est vérifiée pour a, b, c quelconques, à condition bien entendu que f soit définie et continue sur les intervalles concernés. La relation de Chasles permet aussi d'étendre la définition de l'intégrale à des fonctions qui sont seulement *continues par morceaux* sur $[a,b]$, c'est-à-dire telles qu'il existe une subdivision finie $x_0 = a, x_1, ..., x_n = b$ de $[a,b]$ avec f continue sur chaque $]x_k, x_{k+1}[, k = 0, ..., n$. Ceci s'applique par exemple à la fonction $x \mapsto x - E(x)$, où $E(x)$ est la partie entière du réel x.

b) **Linéarité**. Si f et g sont continues sur $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$ (ou $\lambda \in \mathbf{C}$ si on travaille avec des fonctions à valeurs complexes), alors

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

Ainsi, l'application

$$f \mapsto \int_a^b f$$

est une application linéaire du $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$ (noté $C^0([a, b], \mathbf{R})$) vers l'espace vectoriel $\mathbf{R}$.

c) **Positivité.** Comme la limite d'une suite à valeurs ≥ 0 est encore ≥ 0, on obtient :

Theorème 1.2 *Soient a, b deux réels avec $a \leq b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On suppose que $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in [a, b]$. Alors*

$$\int_a^b f(t)dt \geq 0.$$

Attention, il est ici essentiel que $a \leq b$ (sinon on obtient l'inégalité dans l'autre sens). On en déduit, en appliquant le théorème à $g - f$ et en utilisant la linéarité :

Corollaire 1.3 *Soient a, b deux réels avec $a \leq b$. Soient f, g des fonction continues sur $[a, b]$ avec $f(t) \leq g(t)$ pour tout t de $[a, b]$. Alors*

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$$

Comme on a $-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)$, on obtient aussi le très important corollaire :

Corollaire 1.4 *Soient a, b deux réels avec $a \leq b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors*

$$|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Ce dernier corollaire est encore valable pour une fonction f à valeurs complexes (en remplaçant comme d'habitude la valeur absolue par le module), mais la preuve utilisant l'inégalité $-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)$ (laquelle n'a plus de sens pour une fonction complexe) tombe en défaut. Par contre, il suffit d'utiliser la définition du théorème 1.1 pour conclure. Le corollaire précédent s'utilise souvent sous la forme :

Corollaire 1.5 *Soient a, b deux réels avec $a \leq b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ (à valeurs réelles ou complexes). On suppose que $|f(t)| \leq M$ pour tout $t \in [a, b]$. Alors*

$$|\int_a^b f(t)dt| \leq M(b - a).$$

En effet on a

$$|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt \leq \int_a^b M dt = M(b-a).$$

Rappelons au passage qu'une fonction f continue sur un intervalle *fermé borné* $[a,b]$ est bornée et atteint ses bornes (c'est faux pour un intervalle non fermé comme $]0,1]$, ex. $f(t) = 1/t$, ou non borné commme $[0,+\infty[$, ex. $f(t) = t$).

1.3. Primitives et intégrales

Définition 1.6 Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Soit f une fonction sur I. Une *primitive* de f sur I est une fonction F, dérivable sur I, et telle que $F' = f$.

Proposition 1.7 *Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors toutes les primitives de f sont données par $F + c$, avec c constante.*

En effet, une fonction G est une primitive de f si et seulement si $G' = f = F'$, soit $(F-G)' = 0$, soit $F - G$ constante *car I est un intervalle.* Attention cette hypothèse est essentielle car par exemple la fonction définie par $f(x) = x + 1$ si $x > 0$ et $f(x) = x + 2$ si $x < 0$ est une primitive de la fonction constante 1 sur $\mathbf{R}^*$.

Par exemple la fonction $f(x) = \ln x$ est une primitive de $1/x$ sur $\mathbf{R}_+^*$: c'est la seule primitive qui s'annule en $x = 1$.

On admettra dans ce cours le théorème suivant (aboutissement de la théorie de l'intégrale de Riemann) :

Theorème 1.8 *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors la fonction*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est une primitive de f sur $[a,b]$.

Ainsi, F est la primitive de f qui s'annule en a. On évitera par contre la notation $\int f(t)dt$ ou encore $\int^x f(t)dt$ (qu'on trouve dans certains livres) pour désigner une primitive de f, afin d'éviter de travailler avec une fonction seulement définie à une constante près.

Corollaire 1.9 *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Soit G une primitive quelconque de f. Alors*

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a).$$

En effet, le théorème précédent donne $\int_a^b f(t)dt = F(b) = F(b) - F(a)$, et on sait par ailleurs que $F - G$ est une constante d'où $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$. On notera souvent $[G(x)]_a^b := G(b) - G(a)$ (ici, x est encore une variable muette).

Exemple 1.10 a) On a $\int_0^1 xdx = [x^2/2]_0^1 = 1/2$. Plus généralement si $n \in \mathbf{N}^*$, alors

$$\int_0^1 x^n dx = [x^{n+1}/(n+1)]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

b) On a $\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = 2$.

c) Soit $n \in \mathbf{Z}$. Si $n \neq 0$, alors on a

$$\int_0^{2\pi} e^{int} dt = [\frac{e^{int}}{in}]_0^{2\pi} = \frac{1}{in} - \frac{1}{in} = 0.$$

Si $n = 0$, on a par contre $\int_0^{2\pi} e^{int} dt = \int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi$. Ce calcul s'avérera très important quand on verra les séries de Fourier.

1.4. Techniques de calcul

a) Intégration par parties. Quand on a à intégrer un produit de fonctions, il peut être commode d'utiliser la formule suivante, qui résulte de la formule de dérivation d'un produit $(fg)' = f'g + fg'$.

Theorème 1.11 *Soient f et g deux fonctions de classe C^1 (c'est-à dire dérivables et dont la dérivée est continue*[1]*) sur $[a, b]$. Alors*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

La formule marche aussi si les fonctions f et g sont seulement C^1 par morceaux (via la relation de Chasles), c'est-à-dire quand il existe une subdivision $a = x_0, ..., x_n = b$ de $[a, b]$ telle que f et g soient C^1 sur chaque $]x_k, x_{k+1}[$, $k = 0, ..., n$. Elle est bien entendu utile quand l'une des deux intégrales est plus simple à calculer que l'autre.

[1] Il peut arriver que la dérivée d'une fonction ne soit pas continue partout; on vérifiera par exemple que la fonction définie par $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est dérivable mais que sa dérivée n'est pas continue en 0.

Exemple 1.12 a) Soit $I = \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx$. La formule donne :

$$I = [x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \pi/2 + [\cos x]_0^{\pi/2} = \pi/2 - 1.$$

b) On peut calculer une primitive de la fonction ln sur $\mathbf{R}_+^*$ par une intégration par parties de la manière suivante. Une primitive est $F(x) = \int_1^x \ln t dt$. Or,

$$F(x) = \int_1^x 1. \ln t \, dt = [t \ln t]_1^x - \int_1^x t(1/t) dt = x \ln x - \int_1^x 1 dt = x \ln x - x + 1.$$

Ainsi, une primitive de ln est la fonction $x \mapsto x \ln x - x + 1$, ou encore la fonction $x \mapsto x \ln x - x$.

b) Changement de variables. La base de cette technique de calcul est l'observation suivante : si $F : [a, b] \to \mathbf{R}$ et $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ sont des fonctions C^1, alors la fonction composée $F \circ \varphi : t \mapsto F(\varphi(t))$ est C^1 et a pour dérivée $F'(\varphi(t)).\varphi'(t)$, qui vaut $f(\varphi(t)).\varphi'(t)$ si F est une primitive de f. D'où :

Theorème 1.13 *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Soit $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ une fonction C^1, avec $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$. Alors*

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)).\varphi'(t) \, dt.$$

Démonstration : Soit F une primitive de f, posons $\psi(t) = F(\varphi(t))$. Alors

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)).\varphi'(t) \, dt = \int_\alpha^\beta \psi'(t) \, dt = \psi(\beta) - \psi(\alpha) =$$

$$F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) \, dx.$$

□

Observons que si f est définie est continue sur un intervalle I contenant $[a, b]$, la même preuve fonctionne à condition que $\varphi([\alpha, \beta]) \subset I$, ce qui est moins restrictif que demander que φ soit à valeurs dans $[a, b]$. Il n'est en particulier pas nécessaire que φ soit bijective de $[\alpha, \beta]$ dans $[a, b]$ même si en pratique c'est souvent le cas (on essaie de prendre l'intervalle $[\alpha, \beta]$ le plus petit possible). Par contre, il est essentiel que l'image de $[\alpha, \beta]$ par φ ne sorte pas de l'intervalle de définition de f.

De façon symbolique, si on veut utiliser la formule de la gauche vers la droite, on peut poser $x = \varphi(t)$ et $dx = \varphi'(t)dt$; il faut ensuite soigneusement choisir α et β tels que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$ et vérifiant les hypothèses du théorème, ce qui est souvent la partie la plus difficile.

Exemple 1.14 Soit $I = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$. On pose $x = \sin t$, en choisissant comme intervalle $[\alpha, \beta] = [0, \pi/4]$, ce qui convient car $\sin 0 = 0$, $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, et sur $[0, \pi/4]$ la fonction sinus reste à valeurs dans le domaine où la fonction $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est définie et continue. On obtient

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos t}{\sqrt{1-\cos^2 t}}dt = \int_0^{\pi/4} 1 = \pi/4.$$

Noter en effet que sur $[0, \pi/4]$, on a bien

$$\sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t.$$

La même technique montre plus généralement qu'une primitive de la fonction $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ sur l'intervalle $]-1, 1[$ est la fonction Arcsinus, en calculant l'intégrale $\int_0^u \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ par le même changement de variables.

Exemple 1.15 Rappelons qu'une primitive de la fonction $t \mapsto t^2 + 1$ sur $\mathbf{R}$ est la fonction Arctangente. Soit $a > 0$. Soit $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+a}$. En effectuant le changement de variable $x = \sqrt{a}.t$ (ce qui équivaut à $t = x/\sqrt{a}$) et en choisissant $\alpha = 0, \beta = 1/\sqrt{a}$, on obtient

$$I = \int_0^{1/\sqrt{a}} \frac{\sqrt{a}}{a(t^2+1)}dt = \frac{1}{\sqrt{a}}[\arctan t]_0^{1/\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan(1/\sqrt{a}).$$

Exemple 1.16 Contrairement aux deux exemples précédents, on utilise parfois la formule de changement de variable de la droite vers la gauche quand on reconnaît une expression de la forme $f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. Soit par exemple

$$I = \int_1^e \frac{(\ln t)^2}{t}dt.$$

Si on pose $\varphi(t) = \ln t$, le changement de variable $x = \ln t$ conduit symboliquement à $dx = \frac{1}{t}dt$ d'où, avec la formule :

$$I = \int_{\ln 1}^{\ln e} x^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Noter que quand on applique la formule dans ce sens, les nouvelles bornes de l'intégrale se calculent automatiquement, mais il faut une simplification de l'expression symbolique dx en fonction de dt pour finir le calcul.

2. Intégrales généralisées

2.1. Premiers exemples

Soient a et b des réels. Il arrive parfois qu'on puisse donner un sens à des expressions du genre $\int_a^{+\infty} f(t)$ dt pour une fonction f continue sur $[a, +\infty[$, ou encore $\int_a^b f(t)dt$ quand f n'est définie et continue que sur $[a, b[$ ou $]a, b[$. C'est l'idée de la notion d'*intégrale généralisée* (ou *impropre*).

Exemple 2.1 Pour tout $x > 0$, on a

$$\int_1^x \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{x},$$

dont la limite quand x tend vers $+\infty$ est 1. On posera donc

$$\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1.$$

Par contre

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$$

diverge en $+\infty$, on dira donc que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$$

est *divergente* (même si sa limite quand x tend vers $+\infty$ est $+\infty$, ce qui pourrait conduire à écrire $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} = +\infty$). De même, $\int_0^x \cos t\, dt = \sin x$ n'a pas de limite quand x tend vers $+\infty$, et on dira encore que $\int_0^{+\infty} \cos t\, dt$ est divergente.

Exemple 2.2 La fonction $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ est définie et continue sur $]0, 1]$, mais pas en 0. Ceci dit, on a quand même, pour $x > 0$:

$$\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x},$$

dont la limite quand x tend vers 0 est 2. On sera donc amené à poser

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2.$$

Par contre on dira que $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ diverge car $\int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln x$ dont la limite en 0 est $+\infty$.

On va maintenant donner des définitions générales.

Définition 2.3 Soit $a \in \mathbf{R}$. Soit f une fonction continue de $[a, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$ (on a une définition analogue pour les fonctions à valeurs complexes). On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *converge* si la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

a une limite l réelle quand x tend vers $+\infty$. On pose alors

$$\int_a^{+\infty} f(t)\, dt = l.$$

On a une définition analogue pour $\int_{-\infty}^b f(t)dt$, quand f est une fonction continue sur $]-\infty, b]$: l'intégrale $\int_{-\infty}^b f(t)dt$ est dite convergente (de valeur l) si la fonction $x \mapsto \int_x^b f(t)dt$ tend vers l quand x tend vers $-\infty$.

Remarque 2.4 L'expression "$\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge" est traditionnelle, mais un peu malheureuse, car quand $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est défini, ce n'est ni une suite ni une fonction d'une variable, mais un nombre. On retiendra que cette expression est plutôt un raccourci pour "la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ converge quand x tend vers $+\infty$".

Exemple 2.5 Soit p un réel > 0. Alors l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^p}dt$ est convergente si et seulement si $p > 1$. En effet, on a déjà vu que pour $p = 1$ l'intégrale était divergente, et pour $p \neq 1$, on a

$$\int_1^x \frac{1}{t^p}dt = [\frac{t^{1-p}}{1-p}]_1^x = \frac{x^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p},$$

qui a une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $1 - p < 0$.

On a de même une notion d'intégrale généralisée pour des fonctions définies sur $[a, b[$ avec a, b réels :

Définition 2.6 Soit $a, b \in \mathbf{R}$. Soit f une fonction continue de $[a, b[$ dans $\mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{C}$). On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge si la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

a une limite l réelle (resp. complexe) quand x tend vers b. On pose alors

$$\int_a^b f(t)dt = l$$

.

On a une définition analogue si f est définie de $]a, b]$ dans $\mathbf{R}$ (en regardant la limite en a de $\int_x^b f(t)dt$).

Exemple 2.7 Soit $p > 0$ un réel. Le même calcul que dans l'exemple 2.5 donne cette fois-ci que $\int_0^1 \frac{1}{t^p}dt$ converge si et seulement si $p < 1$.

On peut aussi considérer des intégrales généralisées "des deux côtés" :

Définition 2.8 Soit f une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge si pour $a \in \mathbf{R}$, les deux intégrales $\int_{-\infty}^{a} f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ convergent. On pose alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt + \int_a^{+\infty} f(t)dt.$$

La relation de Chasles montre que la définition précédente, et la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ si elle converge, ne dépendent pas du choix de a.

Exemple 2.9 L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ converge. En effet

$$\int_x^0 \frac{1}{1+t^2}dt = [\arctan t]_x^0 = -\arctan x$$

d'où $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+t^2}dt = \pi/2$. De même $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \pi/2$ d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \pi$.

Exemple 2.10 Attention, il ne suffit pas en général que la fonction $x \mapsto \int_{-x}^{x} f(t)dt$ ait une limite quand x tend vers $+\infty$ pour avoir la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$. Par exemple

$$\int_{-x}^{x} t\,dt = [t^2/2]_{-x}^{x} = x^2 - x^2 = 0.$$

Pourtant $\int_0^{+\infty} tdt$ est clairement divergente. Le point est qu'on doit avoir la convergence des deux côtés, et donc faire tendre les bornes respectivement vers $-\infty$ et $+\infty$ *indépendamment l'une de l'autre.*

Ceci s'étend encore aux fonctions continues de $]a, b[$ dans $\mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$), avec a et b réels : dans ce dernier cas, la convergence de $\int_a^b f(t)dt$ signifie que pour $c \in]a, b[$, les deux intégrales $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent. On a le même type de définition pour f définie sur $]a, +\infty[$ ou sur $]-\infty, b[$.

2.2. Règles de calcul

a) Linéarité. Comme les intégrales habituelles, les intégrales généralisées vérifient la propriété de linéarité suivante (dont la démonstration à partir du cas des intégrales habituelles est immédiate en passant à la limite) :

Proposition 2.11 *Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b[$, avec $a \in \mathbf{R}$ et $b \in \mathbf{R}$ (ou encore $b = +\infty$). Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ (ou encore $\lambda \in \mathbf{C}$). Si les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent, il en va de même de $\int_a^b (f+g)(t)dt$ et on a*

$$\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$$

Si l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge, alors $\int_a^b \lambda f(t)dt$ aussi et on a

$$\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt.$$

b) Intégration par parties. Attention, il se peut que les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent, mais pas $\int_a^b f(t)g(t)dt$: prendre par exemple $f(t) = g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$; alors on a vu que $\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 g(t)dt$ converge, mais $\int_0^1 f(t)g(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{t}dt$ diverge. Quand on a affaire à un produit, on peut souvent se ramener à une intégrale dont la convergence est plus facile à étudier en faisant une intégration par parties. Noter que pour cela, on ne travaille pas directement avec la (ou les) borne de l'intégrales généralisée en laquelle la fonction sous l'intégrale n'est pas définie, mais on la remplace par un paramètre x qu'on fait ensuite tendre à la fin vers ladite borne.

Exemple 2.12 On se demande si l'intégrale

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

converge. Pour cela, on écrit

$$\int_1^x \frac{\cos t}{t} dt = [\frac{\sin t}{t}]_1^x + \int_1^x \frac{\sin t}{t^2} dt = \frac{\sin x}{x} - \sin 1 + \int_1^x \frac{\sin t}{t^2} dt.$$

Comme $\frac{\sin x}{x}$ tend vers 0 en $+\infty$ (sa valeur absolue est majorée par $1/x$), on obtient que l'intégrale I est de même nature que l'intégrale

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt.$$

Nous verrons un peu plus loin (exemple 2.23, a) que J converge (l'apparition de t^2 au lieu de t au dénominateur permettra de montrer cette convergence par majoration de la valeur absolue de $\frac{\sin t}{t^2}$).

c) Changement de variables. Là encore, on peut se ramener au cas du changement de variable dans les intégrales habituelles en utilisant un paramètre x. Il existe un théorème de changement de variables pour les intégrales généralisées, mais il nécessite que la fonction φ qui réalise le changement de variable soit bijective. Plus précisément, l'énoncé est le suivant :

Theorème 2.13 *Soient a et α des réels. Soient b et β dans $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$. Soit f une application continue de $[a, b[$ dans $\mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$). Soit φ une bijection C^1 de $[\alpha, \beta[$ dans $[a, b[$, avec $\varphi(\alpha) = a$ et $\lim_{t\to\beta^-} \varphi(t) = b$ (en particulier φ est strictement croissante). Alors les intégrales $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)).\varphi'(t)dt$ sont de même nature, et ont même valeur si elles sont convergentes. Le même énoncé vaut pour les autres types d'intégrale impropre.*

Par exemple si $a > 0$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a}$ converge, et en faisant le changement de variable $x = \sqrt{a}\,t$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{a}}{a(t^2 + 1)}\,dt = [\frac{\arctan t}{\sqrt{a}}]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{a}}.$$

On trouve de même que

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$$

est convergente et vaut $\pi/2$, en effectuant le changement de variable $x = \sin t$, lequel ramène l'intégrale à

$$\int_0^{\pi/2} 1\,dt = \pi/2.$$

Notons qu'ici, le changement de variable a transformé une intégrale impropre en intégrale classique.

2.3. Critères de convergence

Il s'agit ici de déterminer si une intégrale généralisée converge, sans qu'on soit forcément capable de la calculer, donc typiquement quand on ne sait pas trouver une primitive de la fonction à intégrer.

a) Cas d'une fonction positive. La première observation est la proposition suivante :

Proposition 2.14 *Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbf{R}$ une fonction continue. On suppose que $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in [a, +\infty[$. Alors la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est croissante sur $[a, +\infty[$.*

Démonstration : On observe que si $y \geq x$, alors $F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)\,dt$ par la relation de Chasles, et ce dernier nombre est ≥ 0 par la propriété de positivité de l'intégrale. Ainsi $y \geq x$ implique $F(y) \geq F(x)$, ce qui signifie que F est croissante.

□

Corollaire 2.15 *Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbf{R}$ une fonction continue avec $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in [a, +\infty[$. Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si et seulement si la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est majorée sur $[a, +\infty[$.*

En effet, comme F est croissante, elle admet une limite en $+\infty$ si et seulement si elle est majorée. Noter que si ce n'est pas le cas, la limite de $F(x)$ en $+\infty$ est alors $+\infty$.

On va déduire du corollaire précédent l'important critère de comparaison suivant :

Theorème 2.16 *Soient $f : [a, +\infty[\to \mathbf{R}$ et $g : f : [a, +\infty[$ deux fonctions continues. On suppose que pour tout $t \in [a, +\infty[$, on a $0 \leq f(t) \leq g(t)$. Alors si $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge, il en va de même de $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$.*

Démonstration : Pour tout $x \geq a$, on a $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \leq \int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ puisque $f(t) \leq g(t)$ sur $[a, +\infty[$. Si $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge, on a alors, pour tout $x \geq a$:

$$\int_a^x f(t)\,dt \leq \int_a^x g(t)\,dt$$

et comme $\int_a^x g(t)\,dt$ est majorée puisque $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge, il en va de même de $\int_a^x f(t)\,dt$. Ainsi $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge d'après le corollaire 2.15.

□

Remarque 2.17 a) Avec l'hypothèse $0 \leq f(t) \leq g(t)$, on déduit de même que si $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ diverge aussi.

b) Il suffit d'avoir l'inégalité $0 \leq f(t) \leq g(t)$ sur un intervalle du type $[b, +\infty[$ avec $b \geq a$, puisque la convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ équivaut à celle de $\int_b^{+\infty} f(t)\,dt$ (et de même pour g).

c) On a bien entendu le même critère pour des intégrales généralisées $\int_a^b f(t)\,dt$, quand $a, b \in \mathbf{R}$ et f, g sont des fonctions continues sur $[a, b[$ ou $]a, b]$.

d) Attention, ce critère de comparaison ne marche que pour des fonctions à valeurs *réelles positives.* Par exemple la fonction $-t$ est majorée par 0 sur $[0, +\infty[$, or $\int_0^{+\infty} t\,dt$ ne converge pas alors que $\int_0^{+\infty} 0\,dt$ converge !

Exemple 2.18 a) L'intégrale $J = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ converge car $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ pour tout $t \geq 1$, et $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge vu que $\int_0^x e^{-t}\,dt = 1 - e^{-x}$, dont la limite en $+\infty$ est 1. Noter qu'il a suffi ici d'avoir la majoration $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ sur $[1, +\infty[$, puisque c'est au voisinage de $+\infty$ que se posait la question de la convergence de J.

b) L'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3+1}\,dt$ converge car $\frac{1}{t^3+1} \leq \frac{1}{t^3}$, et on a vu que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,dt$ converge, donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3+1}\,dt$ aussi. Or la convergence de I équivaut à celle de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3+1}\,dt$ car sur $[0, 1]$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^3+1}$ est définie et continue (il n'y a donc pas de problème en 0 pour I).

On déduit du théorème 2.16 l'autre critère de comparaison suivant. On fera bien attention au fait que là encore, il ne s'applique qu'aux fonctions *positives.*

Theorème 2.19 *Soient f et g des fonctions continues de $[a, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$. On suppose $f(t) \geq 0$, $g(t) \geq 0$, et $f \sim_{+\infty} g$. Alors les intégrales $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} g$ sont de même nature, autrement dit : $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si et seulement si $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge.*

Rappelons que $f \sim_{+\infty} g$ (lire "f et g sont équivalentes en $+\infty$") signifie que $(f - g) = o(g)$ (ou encore $(f - g) = o(f)$), ce qui veut dire qu'on peut écrire $f(x) - g(x) = g(x)\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$. Quand g ne s'annule pas au voisinage de $+\infty$ (ce qui est souvent le cas en pratique), cela revient à dire que $\lim_{x\to+\infty}(f(x)/g(x)) = 1$.

Démonstration : La propriété $f \sim_{+\infty} g$ (combinée au fait que f et g sont à valeurs positives) donne que pour x assez grand, on a

$$0 \leq g(x)/2 \leq f(x) \leq 2g(x).$$

On conclut alors facilement avec le théorème 2.16, vu que la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ est équivalente à celle de $\int_a^{+\infty} 2g(x)\,dx$ ou encore de $\int_a^{+\infty} \frac{1}{2}g(x)\,dx$.

□

Remarque 2.20 On a bien entendu le même critère pour des intégrales généralisées du type $\int_a^b f(t)\,dt$, où $a, b \in \mathbf{R}$, avec l'hypothèse que f et g sont équivalentes au voisinage de a ou b (selon qu'on regarde la convergence de l'intégrale impropre en a ou en b).

Exemple 2.21 a) L'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t}(2 + \sin t/t)\,dt$ est convergente. En effet $\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge, et

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-t}(2 + \sin t/t)}{e^{-t}} = 2.$$

b) L'intégrale $\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{\ln(1+t)}\,dt$ est convergente. En effet, on a

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

(ce qui s'obtient en faisant un développement limité d'ordre 1 de $\ln(1 + t)$, ou encore en remarquant que sa dérivée en 0 est 1). Ainsi, on a

$$\frac{\sqrt{t}}{\ln(1+t)} \sim_{0^+} \frac{\sqrt{t}}{t} = \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Or $\frac{\sqrt{t}}{\ln(1+t)} \geq 0$ sur $]0, 1]$ et $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ converge. On conclut avec le théorème 2.19.

Notons enfin que si les intégrales qu'on compare concernent des fonctions f à valeurs négatives (au lieu de positives) au voisinage de $+\infty$, les mêmes techniques fonctionnent en considérant $-f$ au lieu de f (ce qui ne change pas la nature de $\int_a^{+\infty} f$). C'est quand le signe de f n'est pas constant (ou encore que f est à valeurs complexes non réelles) qu'il faut d'autres méthodes, dont on va maintenant donner un aperçu.

b). Cas de l'intégrale d'une fonction qui n'est pas forcément positive. C'est a priori plus difficile, car on ne peut pas appliquer directement les théorèmes de comparaison précédents. On peut parfois se ramener au cas d'une fonction positive grâce à la notion de *convergence absolue* du théorème suivant :

Theorème 2.22 *Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbf{R}$ (f peut aussi être à valeurs complexes en remplaçant la valeur absolue ci-dessous par le module) une fonction continue. Si l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge, alors l'intégrale $I := \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge également, et on dit dans ce cas que I converge absolument. La même chose est valable pour les intégrales généralisées du type $\int_a^b f(t)\,dt$, quand f est supposée continue sur $[a, b[$ ou $]a, b]$.*

Ce théorème repose sur un critère de Cauchy pour la limite en $+\infty$ d'une fonction (on applique ceci à la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$, dont on montre qu'elle vérifie ce critère de Cauchy parce que $x \mapsto \int_a^x |f(t)|\,dt$ le vérifie quand $\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge). On verra un raisonnement un peu analogue pour les séries.

Exemple 2.23 a) L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$ converge absolument. En effet :

$$|\frac{\sin t}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$$

pour tout $t \geq 1$, et on sait que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge, ce qui permet de conclure avec le théorème 2.16.

b) L'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(1/t)\sqrt{t}}{\ln(1+t)}\,dt$ converge absolument. En effet

$$|\frac{\sin(1/t)\sqrt{t}}{\ln(1+t)}| \leq \frac{\sqrt{t}}{\ln(1+t)}$$

et on a vu dans l'exemple 2.21 b) que $\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{\ln(1+t)}\,dt$ était convergente.

c) On déduit de a) et du calcul de l'exemple 2.12 que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt$ converge. Le même procédé donne que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ converge. Par contre *ces intégrales ne sont pas absolument convergentes.* Ce n'est pas évident à voir (voir exercices). En tout cas, on obtient immédiatement que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t}\,dt$ converge, mais cette intégrale ne converge pas absolument (on dit qu'elle est seulement *semi-convergente*) car $|\frac{e^{it}}{t}| = \frac{1}{t}$, et on a vu que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ est divergente.

Remarque 2.24 Attention à être particulièrement vigilant quand on applique le théorème 2.22 : il ne s'agit pas de majorer la fonction $|\int_a^x f(t)\,dt|$ (ce qui ne prouverait rien, par exemple $|\int_a^x \sin t\,dt|$ est majorée, mais $\int_a^{+\infty} \sin t\,dt$ ne converge pas), mais bien d'essayer de montrer que $\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ est convergente, ou encore que la fonction $x \mapsto \int_a^x |f(t)|\,dt$ est majorée. Autrement dit, *il faut laisser la valeur absolue à l'intérieur de l'íntégrale.*