L2 Physique Math 256

Examen du 15 juin 2015 (2e session)

Durée 3 heures - Documents et matériel électronique interdits
Barème indicatif : 3/4/5/5/2.

1. Questions de cours

1– Soit f une fonction à valeurs réelles, et paire. Montrer que sa transformée de Fourier est à valeurs réelles, i.e. pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}f(k) \in \mathbb{R}$.

2– Soit f une fonction à valeurs réelles, et impaire. Montrer que sa transformée de Fourier est à valeurs imaginaires pures, i.e. pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}f(k) \in i\mathbb{R}$.

3– Enoncer le Théorème de Plancherel.

4– La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2|x|$ est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

Solution :

1– On fait le changement de variable $y = -x$ dans l'intégrale qui définit $\mathcal{F}f$. Comme f est paire,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{-\infty} f(-y)e^{iky}\,(-dy) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{iky}\,dy \\ &= \overline{\mathcal{F}f(k)},\end{aligned}$$

car f est à valeurs réelles. On conclut que, pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}f(k) \in \mathbb{R}$.

2– De même, comme f est impaire,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{-\infty} f(-y)e^{iky}\,(-dy) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{iky}\,dy \\ &= -\overline{\mathcal{F}f(k)},\end{aligned}$$

car f est à valeurs réelles. On conclut que, pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}f(k) \in i\mathbb{R}$.

3– Si f est continue par morceaux et à support compact sur $\mathbb{R}$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}f(k)|^2\,dk.$$

4– NON. Cette fonction n'est pas trois fois dérivable en 0. Or une fonction développable en série entière au voisinage de 0 est indéfiniment dérivable en 0.

2. Calcul de sommes

Soit a un réel, $0 < a < \pi$. Soit f_a la fonction 2π-périodique qui vaut 1 sur $[-a, a[$ et 0 sur $[a, 2\pi - a[$.

1– Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques $a_n(f_a)$ et $b_n(f_a)$.

2– En déduire la valeur de la somme $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n}$. Que vaut la somme $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n} \cos(na)$?

3– Montrer que la série de terme général $\frac{\sin(na)^2}{n^2}$ est convergente. Que vaut sa somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)^2}{n^2}$?

Solution :

1– Comme f_a est paire, les coefficients de Fourier $b_n(f_a)$ sont nuls. On calcule

$$\begin{aligned} a_0(f_a) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_a(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} dx \\ &= \frac{a}{\pi}, \end{aligned}$$

et, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n(f_a) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_a(x)\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \cos(nx)\,dx \\ &= [\frac{1}{\pi n}\sin(nx)]_{-a}^{a} \\ &= \frac{2\sin(na)}{\pi n}. \end{aligned}$$

2– D'après le Théorème de Dirichlet, comme f est C^1 par morceaux, elle est somme de sa série de Fourier là où elle est continue. En $x = 0$, cela s'écrit

$$\begin{aligned} 1 &= f_a(0) = a_0(f_a) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f_a) \\ &= \frac{a}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin(na)}{\pi n}. \end{aligned}$$

Il vient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n} = \frac{\pi}{2}(1 - \frac{a}{\pi}) = \frac{\pi - a}{2}.$$

En $x = a$, f_a est discontinue, avec des limites à gauche 1 et à droite 0, donc le Théorème de Dirichlet affirme que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{1}{2}(f_a(a-) + f_a(a+)) = a_0(f_a) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f_a)\cos(na) \\ &= \frac{a}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin(na)}{\pi n}\cos(na), \end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n}\cos(na) = \frac{\pi}{2}(\frac{1}{2} - \frac{a}{\pi}) = \frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}.$$

3– On majore le terme général $\frac{\sin(na)^2}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$, terme général d'une série convergente, donc $\sum \frac{\sin(na)^2}{n^2}$ est convergente.

Le Théorème de Parseval énonce que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_a(t)|^2\,dt = |a_0(f_a)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f_a)|^2 + |b_n(f_a)|^2.$$

Ici, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_a(t)|^2\,dt = \frac{a}{\pi}$, et

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f_a)|^2 + |b_n(f_a)|^2 = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)^2}{n^2}.$$

Il vient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)^2}{n^2} = \frac{\pi^2}{2}(\frac{a}{\pi} - \frac{a^2}{\pi^2}).$$

3. Calcul d'une moyenne quadratique

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ si $|x| \leq 1$ et $f(x) = 0$ si $|x| > 1$.

1– Montrer que l'intégrale généralisée $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{1}{k}\cos(k) - \frac{1}{k^2}\sin(k))^2\,dk$ est convergente.

2– Calculer la transformée de Fourier de f.

3– En déduire la valeur de l'intégrale I.

Solution :

1– La fonction $k \mapsto (\frac{1}{k}\cos(k) - \frac{1}{k^2}\sin(k))^2$ se prolonge par continuité en 0. En effet, les développements en séries entières

$$\cos(k) = 1 - \frac{1}{2}k^2 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}k^{2n} + \cdots \quad \text{et} \quad \sin(k) = k - \frac{1}{6}k^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}k^{2n+1} + \cdots$$

montrent que

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}\cos(k) - \frac{1}{k^2}\sin(k) &= \frac{1}{k} - \frac{1}{2}k + \frac{1}{24}k^3 + \cdots - (\frac{1}{k} - \frac{1}{6}k^2 + \cdots) \\ &= -\frac{1}{2}k + \frac{1}{6}k^2 + \cdots \end{aligned}$$

tend vers 0, donc $(\frac{1}{k}\cos(k) - \frac{1}{k^2}\sin(k))^2$ tend vers 0 quand k tend vers 0.
Dans ces conditions, il suffit d'étudier la convergence aux bornes $+\infty$ et $-\infty$. Là,

$$(\frac{1}{k}\cos(k) - \frac{1}{k^2}\sin(k))^2 \leq (\frac{1}{|k|} + \frac{1}{|k|^2})^2 \leq \frac{4}{k^2},$$

dont l'intégrale généralisée est convergente aux deux bornes $+\infty$ et $-\infty$, donc l'intégrale I est convergente.

2– Supposons $k \neq 0$. On calcule, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx}\,dx &= \int_{-1}^{1} xe^{-ikx}\,dx \\
&= [\frac{xe^{-ikx}}{-ik}]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{e^{-ikx}}{-ik}\,dx \\
&= \frac{e^{-ik}+e^{ik}}{-ik} - \frac{1}{-k^2}[e^{-ikx}]_{-1}^{1} \\
&= \frac{2i}{k}\cos(k) - \frac{2i}{k^2}\sin(k).
\end{aligned}$$

Il vient

$$\mathcal{F}f(k) = \frac{\sqrt{2}i}{\sqrt{\pi}}(\frac{1}{k}\cos(k) - \frac{1}{k^2}\sin(k)).$$

Pour $k = 0$, $\mathcal{F}f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0$ car f est impaire.

3– D'après le Théorème de Plancherel,

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{1}{k}\cos(k) - \frac{1}{k^2}\sin(k))^2\,dk \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}|\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\mathcal{F}f(k)|^2\,dk \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2\,dx \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}x^2\,dx \\
&= \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

4. Rayons de convergence

Calculer les rayons de convergence des séries entières $\sum_n u_n x^n$, $\sum_n v_n x^n$ et $\sum_n w_n x^n$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies par

$$u_n = \frac{(-5)^n + n^2}{3^n - n}, \quad v_n = \frac{n^4 + \sqrt{n}}{n^3 - 1}, \quad w_n = \frac{n!}{2^n}.$$

Solution :

1– $|u_n| = \dfrac{5^n + (-1)^n n^2}{3^n - n}$ est exponentiel, de l'ordre de $(\frac{5}{3})^n$, donc on s'attend à ce que le rayon de convergence soit $\frac{3}{5}$. On étudie

$$\ln(|u_n|^{1/n}) = \frac{1}{n}\ln(\frac{5^n + (-1)^n n^2}{3^n - n}) = \frac{1}{n}(\ln((\frac{5}{3})^n) + \ln(\frac{1 + (-1)^n n^2/5^n}{1 - n/3^n})).$$

Le second log tend vers 0, le premier vaut $n\ln(\frac{5}{3})$, donc $\ln(|u_n|^{1/n})$ tend vers $\ln(\frac{5}{3})$, $|u_n|^{1/n}$ tend vers $\frac{5}{3}$. Le critère de Cauchy s'applique, le rayon de convergence vaut $\frac{3}{5}$.

2– v_n est de l'ordre d'une puissance de n, donc on s'attend à ce que le rayon de convergence soit 1. On étudie

$$\ln(v_n^{1/n}) = \frac{1}{n}\ln(\frac{n^4 + \sqrt{n}}{n^3 - 1}) = \frac{1}{n}(\ln(n) + \ln(\frac{1 + \sqrt{n}/n^4}{1 - 1/n^3})).$$

Le second log tend vers 0, le premier est dominé par n, donc $\ln(v_n^{1/n})$ tend vers 0, $v_n^{1/n}$ tend vers 1. Le critère de Cauchy s'applique, le rayon de convergence vaut 1.

3– On étudie

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n!} = \frac{n+1}{2}.$$

Comme $\frac{w_{n+1}}{w_n}$ tend vers $+\infty$, le critère de d'Alembert s'applique, le rayon de convergence vaut 0.

5. Equation différentielle

L'équation différentielle $xf' - f = 1$ possède-t-elle des solutions développables en série entière au voisinage de 0 ? Quel est leur rayon de convergence ?

Solution :

On cherche la solution sous la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, où les coefficients a_n sont inconnus. Alors

$$\begin{aligned} xf'(x) - f(x) &= x\sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)a_n)x^n. \end{aligned}$$

La fonction f est solution de l'équation différentielle si et seulement si

$$(n-1)a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0, \\ -1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

On trouve que $a_0 = -1$, qu'il n'y a aucune condition sur a_1, et que $a_n = 0$ pour $n \geq 2$. Il vient

$$f(x) = -1 + a_1 x.$$

On vérifie que

$$xf'(x) - f(x) = xa_1 - (-1 + a_1 x) = 1.$$

Le rayon de convergence est infini. On sait que les solutions dépendent d'une constante d'intégration. Par conséquent, toutes les solutions sont développables en série entière.