L2 Physique Math 256

Examen du 18 mai 2015

Durée 3 heures - Documents et matériel électronique interdits
Barème indicatif : 2/4/6/6/2. Rendre les exercices 1+2, 3 et 4+5 sur trois copies séparées.

1. Questions de cours

1– Soit f une fonction 2π-périodique, à valeurs réelles, et paire. Montrer que ses coefficients de Fourier sont réels et satisfont $c_n(f) = c_{-n}(f)$.

2– Soit f une fonction 2π-périodique, soit $T_\pi f$ la fonction translatée, $(T_\pi f)(x) = f(x - \pi)$. Quels sont les coefficients de Fourier de $T_\pi f$? Montrer que si f est de plus π-périodique, alors $c_n(f) = 0$ pour n impair.

3– Enoncer le Théorème de Parseval pour les fonctions 2π-périodiques.

4– La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x|x|$ est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

Solution :

1– Comme f est paire,

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx = c_{-n}(f).$$

Comme f est à valeurs réelles,

$$\overline{c_n(f)} = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx = c_{-n}(f).$$

Par conséquent, $c_n(f) = c_{-n}(f)$ sont réels.

2– Le cours dit que $c_n(T_\pi f) = e^{-in\pi}c_n(f)$. Si f est π-périodique, $T_\pi f = f$, donc $c_n(f) = (-1)^n c_n(f)$, ce qui entraine $c_n(f) = 0$ si n est impair.

Autre solution : comme f est de période π, elle a un développement en série de fonctions de la forme e^{i2px}. Celui-ci coïncide avec son développement en série de Fourier, qui n'a donc que des termes pairs, les coefficients impairs sont nuls.

3– Si f est 2π-périodique et continue par morceaux, alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

4– NON. Cette fonction n'est pas deux fois dérivable en 0. Or une fonction développable en série entière au voisinage de 0 est indéfiniment dérivable en 0.

2. Calcul d'une somme

Soit f la fonction paire, 2π-périodique, qui vaut $|\sin x|$ sur $[-\pi, \pi[$. On s'intéresse à ses coefficients de Fourier exponentiels $c_n(f)$.

1– Montrer, sans le calculer, que $c_n(f) = 0$ si n est impair. Montrer que $c_{-n}(f) = c_n(f)$ est réel.

2– Calculer $c_n(f)$ pour n pair.

3– Montrer que la série $\sum \frac{1}{4n^2-1}$ est convergente et calculer la somme $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p^2-1}$.

Solution :

1– En fait, $f(x) = |\sin x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et f est de période π. D'après la question de cours 2, ses coefficients de Fourier impairs sont nuls.

D'après la question de cours 1, $c_n = c_{-n}$ sont réels.

2– On calcule, pour n pair,

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin(x)e^{-inx}\,dx &= \int_0^\pi \frac{1}{2i}(e^{i(1-n)x} - e^{i(-1-n)x})\,dx \\
&= [\frac{1}{2(n-1)}e^{i(1-n)x} - \frac{1}{2(n+1)}e^{i(1-n)x}]_0^\pi \\
&= \frac{(-1)^{n-1}-1}{2(n-1)} - \frac{(-1)^{n+1}-1}{2(n+1)} \\
&= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2}{n^2-1}.
\end{aligned}$$

Le coefficient de Fourier est

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^0 |\sin(x)|e^{-inx}\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \sin(x)e^{-inx}\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\Re e(\int_0^\pi \sin(x)e^{-inx}\,dx) = \frac{2}{\pi(n^2-1)}.
\end{aligned}$$

3– Soit $u_n = \frac{1}{4n^2-1}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$. Alors $\sum v_n$ est convergente (l'exposant de n est < -1). Comme $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{4}$, la série $\sum u_n$ est aussi convergente.

D'après le Théorème de Dirichlet, comme f est C^1 par morceaux et continue, elle est somme de sa série de Fourier. En $x = 0$, cela s'écrit

$$\begin{aligned}
0 &= f(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) \\
&= c_0(f) + \sum_{p=1}^{\infty} c_{2p}(f) + \sum_{p=1}^{\infty} c_{-2p}(f) \\
&= c_0(f) + 2\sum_{p=1}^{\infty} c_{2p}(f) \\
&= -\frac{2}{\pi} + 2\sum_{p=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(4p^2-1)}.
\end{aligned}$$

Il vient

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p^2-1} = \frac{1}{2}.$$

On peut aussi remarquer que $\frac{2}{4p^2-1} = \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2p+1}$, donc

$$\begin{aligned} 2\sum_{p=1}^{q} \frac{1}{4p^2-1} &= \sum_{p=1}^{q} \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2p+1} \\ &= \sum_{p=1}^{q} \frac{1}{2p-1} - \sum_{p=1}^{q} \frac{1}{2p+1} \\ &= \sum_{p=1}^{q} \frac{1}{2p-1} - \sum_{r=2}^{q+1} \frac{1}{2r-1} \\ &= 1 - \frac{1}{2q+1}. \end{aligned}$$

En faisant tendre q vers l'infini, on retrouve que

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p^2-1} = \frac{1}{2}.$$

3. Calcul d'une moyenne quadratique

Soit f la fonction paire définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1 - x$ si $0 \le x \le 1$ et $f(x) = 0$ si $x > 1$.

1– Montrer que l'intégrale généralisée $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-\cos(k))^2}{k^4}\, dk$ est convergente.

2– Calculer la transformée de Fourier de f.

3– En déduire la valeur de l'intégrale I.

Solution :

1– La fonction $k \mapsto \dfrac{(1-\cos(k))^2}{k^4}$ se prolonge par continuité en 0. En effet, le développement en série entière

$$\cos(k) = 1 - \frac{1}{2}k^2 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}k^{2n} + \cdots$$

montre que

$$\frac{1-\cos(k)}{k^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{24}k^2 + \cdots$$

tend vers $\frac{1}{2}$, donc $\frac{(1-\cos(k))^2}{k^4}$ tend vers $\frac{1}{4}$ quand k tend vers 0.
Dans ces conditions, et comme il s'agit d'une fonction paire, il suffit d'étudier la convergence à la borne $+\infty$. Là, $\dfrac{(1-\cos(k))^2}{k^4} \le \dfrac{4}{k^4}$, dont l'intégrale généralisée est convergente à la borne $+\infty$, donc l'intégrale I est convergente.

2– On calcule d'abord, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(x)e^{-ikx}\, dx &= \int_0^1 (1-x)e^{-ikx}\, dx \\ &= [\frac{(1-x)e^{-ikx}}{-ik}]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-ikx}}{-ik}\, dx \\ &= \frac{1}{-ik} + \frac{e^{-ik}-1}{-k^2}. \end{aligned}$$

Comme f est paire,

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)e^{-ikx}\,dx = \int_{0}^{+\infty} f(y)e^{iky}\,dy,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\mathcal{F}f(k) &= 2\Re e(\int_{0}^{+\infty} f(x)e^{-ikx}\,dx) \\
&= 2\Re e(\frac{1}{-ik} + \frac{e^{-ik}-1}{-k^2}) \\
&= 2\frac{1-\cos(k)}{k^2}.
\end{aligned}$$

On conclut que

$$\mathcal{F}f(k) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1-\cos(k)}{k^2}.$$

3– D'après le Théorème de Plancherel,

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-\cos(k))^2}{k^4}\,dk \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\mathcal{F}f(k)|^2\,dk \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx \\
&= \pi\int_{0}^{1}(1-x)^2\,dx \\
&= \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

4. Rayons de convergence

Calculer les rayons de convergence des séries entières $\sum_n u_n x^n$, $\sum_n v_n x^n$ et $\sum_n w_n x^n$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies par

$$u_n = \frac{n^2+\ln(n)}{n^4+1}, \quad v_n = \frac{2^n+n}{5^n-n^3}, \quad w_n = (-1)^n\frac{n!}{n^n}.$$

Solution :

1– u_n est de l'ordre d'une puissance de n, donc on s'attend à ce que le rayon de convergence soit 1. On étudie

$$\ln(u_n^{1/n}) = \frac{1}{n}\ln(\frac{n^2+\ln(n)}{n^4+1}) = \frac{1}{n}(\ln\frac{1}{n^2} + \ln(\frac{1+\ln(n)/n^2}{1+1/n^4})).$$

Le second log tend vers 0, le premier est dominé par n, donc $\ln(u_n^{1/n})$ tend vers 0, $u_n^{1/n}$ tend vers 1. Le critère de Cauchy s'applique, le rayon de convergence vaut 1.

2– v_n est exponentiel, de l'ordre de $(\frac{2}{5})^n$, donc on s'attend à ce que le rayon de convergence soit $\frac{5}{2}$. On étudie

$$\ln(v_n^{1/n}) = \frac{1}{n}\ln(\frac{2^n+n}{5^n-n^3}) = \frac{1}{n}(\ln((\frac{2}{5})^n) + \ln(\frac{1+n/2^n}{1-n^3/5^n})).$$

Le second log tend vers 0, le premier vaut $n\ln(\frac{2}{5})$, donc $\ln(v_n^{1/n})$ tend vers $\ln(\frac{2}{5})$, $v_n^{1/n}$ tend vers $\frac{2}{5}$. Le critère de Cauchy s'applique, le rayon de convergence vaut $\frac{5}{2}$.

3– On étudie

$$\frac{|w_{n+1}|}{|w_n|} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!} = (\frac{n}{n+1})^n.$$

Il vient

$$\ln(\frac{|w_{n+1}|}{|w_n|}) = n\ln(1-\frac{1}{n+1}) = \frac{n}{n+1}\frac{\ln(1-x)}{x}$$

où $x = \frac{1}{n}$ tend vers 0. Par conséquent, $\ln(\frac{|w_{n+1}|}{|w_n|})$ tend vers -1, $\frac{|w_{n+1}|}{|w_n|}$ tend vers e^{-1}. Le critère de d'Alembert s'applique, le rayon de convergence vaut e.

5. Equation différentielle

Chercher les solutions développables en série entière au voisinage de 0 de l'équation différentielle $f'-f=x$. Quel est leur rayon de convergence ?

Solution :

On cherche la solution sous la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, où les coefficients a_n sont inconnus. Alors

$$\begin{aligned} f'(x)+f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}((m+1)a_{m+1}-a_m)x^m. \end{aligned}$$

La fonction f est solution de l'équation différentielle si et seulement si

$$(m+1)a_{m+1}-a_m = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq 1, \\ 1 & \text{si } m = 1. \end{cases}$$

On trouve qu'il n'y a aucune condition sur a_0, que $a_1 = a_0$, $a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a_0$, et, pour $m > 2$,

$$a_m = \frac{1}{m}a_{m-1} = \frac{1}{m}\frac{1}{m-1}a_{m-2} = \cdots = \frac{1}{m}\frac{1}{m-1}\cdots\frac{1}{3}a_2 = \frac{2}{m!}a_2.$$

Il vient

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_0 x + 2a_2(\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots) \\ &= a_0 + a_0 x + 2a_2(e^x - 1 - x) \\ &= a_0 + a_0 x + (1+a_0)(e^x - 1 - x) \\ &= a_0 e^x + e^x - 1 - x. \end{aligned}$$

On vérifie que

$$f'(x) - f(x) = a_0 e^x + e^x - 1 - (a_0 e^x + e^x - 1 - x) = x.$$

Le rayon de convergence est infini. On sait que les solutions dépendent d'une constante d'intégration. Par conséquent, toutes les solutions sont développables en série entière.