MATH 256 — ORSAY 2016-17

ANALYSE DE FOURIER POUR LA PHYSIQUE

Exercices-type pour le contrôle continu numéro 2

Exercice 1 : Etudier la convergence simple, puis uniforme sur l'intervalle I, des suites de fonctions suivantes :
1. $f_n(x) = \ln(x + \frac{1}{n})$, avec $I = [1, +\infty[$.
2. $f_n(x) = n^2 x(1 - nx)$ si $x \in [0, 1/n]$ et $f_n(x) = 0$ si $x \in]1/n, 1]$, avec $I = [0, 1]$.

Exercice 2 : Etudier les convergences simple, normale et uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ de terme général $f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$, puis sur l'intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 3 : Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. En utilisant le théorème de dérivation d'une série de fonctions, calculer $f'(x)$; en déduire l'égalité

$$\ln(1 - x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

pour tout $x \in]-1, 1[$.

Exercice 4 : Soient les fonctions périodiques de période 2π définies par :

$$K(x) = \begin{cases} 0 & si \quad -\pi < x \leq 0 \\ 1 & si \quad 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & |x| & -\pi \leq x < \pi \\ g(x) & = & x & -\pi \leq x < \pi \end{array}$$

1. Tracer les courbes représentant ces fonctions.
2. Calculer leurs coefficients de Fourier réels.

Exercice 5 : Soit f la fonction 2π-périodique égale à x^2 pour $-\pi \leq x < \pi$.

1. Représenter graphiquement f.
2. Calculer les coefficients de Fourier réels et complexes de f.

Exercice 6 : On fixe un réel α avec $\alpha \notin \mathbf{Z}$. Soit f l'application 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $t \in]-\pi, \pi]$ par

$$f(t) = \cos(\alpha t).$$

a) Représenter graphiquement la fonction f pour $\alpha = \frac{1}{2}$.

b) La fonction f est-elle continue ?

c) La fonction f est-elle paire ? Est-elle impaire ?

d) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Que vaut $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt$? Calculer (en fonction de α) le coefficient de Fourier $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt$.

e) Pour tout entier $n \geq 1$, on considère le coefficient de Fourier réel $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt$. Démontrer que

$$\pi a_n = \frac{\sin((\alpha + n)\pi)}{\alpha + n} + \frac{\sin((\alpha - n)\pi)}{\alpha - n}.$$

f) Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$a_n = \frac{2(-1)^n \alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 - n^2)}.$$