Université de Paris-Sud, année 2005/2006
Filière PCST-L2
Maths 255 (Harari-Alfonsi)

Test numéro 3

NOM :
GROUPE DE TD :

Exercice 1. Soit $w(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ un champ de vecteurs sur $\mathbf{R}^2$.

a) Quelle propriété de la forme différentielle $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ est-elle équivalente au fait que w dérive d'un potentiel ?

b) Dire (en justifiant) si les champs de vecteurs $w : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ suivants dérivent d'un potentiel :

$w(x,y) = (2xy, \cos y + x^2)$

$w(x,y) = (\ln(1+x^2) + y, x^2 - y)$

Exercice 2.

Soit $c : [0,1] \to \mathbf{R}^3$ la courbe de l'espace définie par $c(t) = (t, t^2, t^3)$. Calculer l'intégrale curviligne $\int_c \alpha$ pour les formes différentielles α suivantes :

a) $\alpha = xdx + ydy + zdz$

b) $\alpha = (x^2 - y^2)dx + (z-1)dz$

Exercice 3.

Soit $\alpha = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ une forme différentielle C^1 définie sur une partie D de $\mathbf{R}^2$.

a) Rappeler les définitions de : "α est fermée", "α est exacte".

b) On prend pour D l'ensemble des (x,y) tels que $xy \neq 0$, et pour α la forme définie sur D par

$$\alpha = \frac{1}{x^2}dx + \frac{1}{y^2}dy$$

α est-elle fermée ? Est-elle exacte ?