Université de Paris-Sud, année 2005/2006
Filière PCST-L2
Maths 255 (Harari-Alfonsi)

Test numéro 1; 11 octobre 2005; durée : 40 minutes

NOM :
GROUPE DE TD :

Barème probable : Exercice 1. : 10 points. Exercice 2 : 5 points. Exercice 3. : 5 points

Exercice 1. Dire si les assertions suivantes sont toujours vraies, ou si elles peuvent être fausses, en justifiant brièvement la réponse :

a) Le noyau d'une application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.

b) L'application de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}$ qui à (a, b, c, d) associe le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est linéaire.

c) Si A est une matrice carrée réelle, alors le déterminant de la matrice A^2 est positif ou nul.

d) Si une matrice carrée réelle vérifie $A^3 = I$, alors elle est inversible.

e) L'image d'une application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^p$ de dimension inférieure ou égale à n.

Exercice 2.

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.

Soit (i, j, k) une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$.

a) Que vaut le produit vectoriel $k \wedge j$? Et $k \wedge i$?

b) Calculer le produit vectoriel $(i + j) \wedge (k + i)$, puis le produit mixte $[(k + i), (i + j), (i + k)]$.