PCST L2 UE 255 **2005-2006**

HARARI-ALFONSI

champs de vecteurs, intégrales curvilignes

exercices

---

1. Soit le champ de vecteurs $\vec{F} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ défini par

$$\vec{F}(x, y) = (2xy + e^y, x^2 + xe^y).$$

Calculez la circulation de F le long de la parabole $x = y^2$ entre les points $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

2. On considère le champ de vecteurs $\vec{F} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ défini par

$$\vec{F}(x, y) = (2x\mathrm{e}^{x^2-2y}, -2\mathrm{e}^{x^2-2y}).$$

a) Vérifiez que la forme différentielle associée à $\vec{F}$ est fermée.

b) Déduisez-en que $\vec{F}$ est un champ de gradients et déterminez-en un potentiel.

c) Calculez la circulation de $\vec{F}$ le long du chemin

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ t &\longmapsto (\ln(1 + t), \mathrm{e}^t + 1). \end{aligned}$$

3. Soient Γ le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 2\mathrm{R}x = 0$, et ω la forme différentielle

$$xy\,\mathrm{d}x + (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y.$$

Calculez l'intégrale $\int_\Gamma \omega$.

Indication. La forme ω est une somme de différentielles exactes.

4. Intégrez les fonctions numériques f définies sur un domaine de $\mathbf{R}^2$ (à préciser) et vérifiant :

(i) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2 + x}{y}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2 + y}{x}.$ (ii) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y^2}{(x + y)^2}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x^2}{x + y)^2}.$

5. Soit le champ de vecteurs $\vec{F} : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ défini par

$$\vec{F}(x, y, z) = (xy, -z, xz).$$

Ce champ est-il un champ de gradients ? Calculez la circulation de F le long de l'arc d'hélice d'équations paramétriques : $x = \cos t, y = \sin t, z = t, \quad t \in [0, 2\pi]$.

6. Montrez que la forme différentielle

$$\omega(x,y)=\frac{(1-x^2+y^2)y}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x+\frac{(1+x^2-y^2)x}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y$$

est exacte sur $\mathbf{R}^2$ et intégrez-la.

7. Soit φ une fonction numérique continue ; on définit sur $\mathrm{D}=]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ la forme différentielle :

$$\omega(x,y)=\left(\frac{x}{x+y}+\ln(x^2+xy)\right)\mathrm{d}x+\frac{\varphi(y)}{x+y}\,\mathrm{d}y.$$

a) Trouvez une condition nécessaire et suffisante sur φ pour que la forme ω soit fermée.

b) Montrez qu'alors ω est une forme exacte et intégrez-la.

8. On considère la forme différentielle :

$$\omega=y(1+x)\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x+x(1-y)\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y.$$

a) Cette forme différentielle est-elle fermée ?

b) Trouvez une fonction φ, ne dépendant que de x, telle que la forme $\omega_1=\varphi\omega$ soit fermée.

c) Intégrez la forme différentielle ω_1.