Université de Paris-Sud, année 2005/2006
Filière PCST-L2
Maths 255 (Harari-Alfonsi)

Feuille d'exercices de mathématiques numéro 8

Champs de vecteurs, courbes paramétrées

1. Soit u une fonction C^1 de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$. Soit $c : [a,b] \to \mathbf{R}^2$ une courbe paramétrée de classe C^1. On pose $c(t) = (c_1(t), c_2(t))$ pour tout t de $[a,b]$.

a) Exprimer la dérivée $\varphi'(t)$ de l'application $\varphi : t \mapsto u(c(t))$ en fonction des dérivées partielles de u et des dérivées des fonctions c_1, c_2.

b) Exprimer $\varphi'(t)$ en fonction du gradient de u et du vecteur dérivé $c'(t)$.

c) Soit $w : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ un champ de vecteurs dérivant d'un potentiel, c'est-à-dire tel qu'il existe une fonction $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ telle que pour tout point a de $\mathbf{R}^2$, on ait $w(a) = (\mathrm{Grad}\, u)(a)$. Exprimer la circulation de w le long d'une courbe $c : [a,b] \to \mathbf{R}^2$ en fonction des valeurs de u en $c(a)$ et $c(b)$.

d) Généraliser le résultat précédent avec $\mathbf{R}^n$ au lieu de $\mathbf{R}^2$.

2. Soit $w(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ un champ de vecteurs C^1 sur $\mathbf{R}^2$. On suppose que w dérive d'un potentiel. Trouver une relation entre les dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial y}$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Généraliser en dimension plus grande que 2.

3. Calculer la circulation des champs de vecteurs w de $\mathbf{R}^2$ suivants, le long de la courbe plane $c : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ définie par $c(t) = (t^2, t)$:

a) $w(x,y) = (x+y, y)$.

b) $w(x,y) = (\cos y, y \ln(x+1))$.

4. Soit $w : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ un champ de vecteurs C^1.

a) Est-il possible que la circulation de w le long de toute courbe soit nulle ?

b) Donner un exemple de champ w non nul dont la circulation le long de toute courbe fermée est nulle (une courbe $c : [a,b] \to \mathbf{R}^2$ est dite fermée si $c(a) = c(b)$).