fonctions de plusieurs variables : dérivées partielles d'ordre supérieur extrema locaux

exercices

1. Calculez $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ lorsque :

(i) $u = x^2 - xy + y^2,\ x = rs,\ y = r^2 - s^2$;

(ii) $u = \mathrm{e}^{xy},\ x = \sqrt{r^2+s^2},\ y = \mathrm{Arctan}\,\dfrac{s}{r}$;

(iii) $u = x\mathrm{e}^{y} + y\mathrm{e}^{x},\ x = rs,\ y = \dfrac{r}{s}$;

(iv) $u = xy + yz - zx,\ s = r + s,\ y = rs, z = s$:

(v) $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ x = r\cos s,\ y = r\sin s,\ z = \sqrt{r^2+s^2}$.

2. a) Soit $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On pose $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ u = f(x,y)$. Montrez que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2.$$

b) On pose maintenant $x = r\cosh s,\ y = r\sinh s$. Montrez que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2.$$

3. a) Soient f et g des fonctions d'une variable réelle, de classe $\mathscr{C}^2$, a un nombre réel. On pose $\varphi(x,y) = f(x+ay) + g(x-ay)$. Montrez que

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}.$$

b) Soit f une fonction d'une variable réelle, continûment dérivable. On pose $z(x,y) = x^n f\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Montrez que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = nz.$$

c) Soient $f:\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$, $g, h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$. On pose $\varphi(t) = f\big(g(t), h(t)\big)$. Montrez que

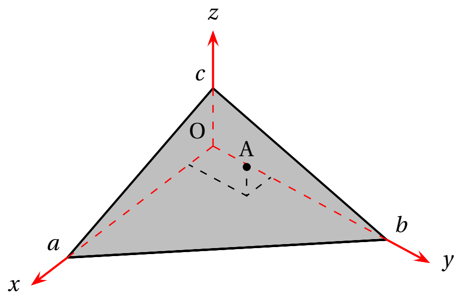
$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(g(t),h(t))\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(g(t),h(t))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(g(t),h(t))\left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x}(g(t),h(t))\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t),h(t))\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2}.$$

4. Déterminez dans le plan d'équation $2x - y + 2z = 16$ le point plus proche de l'origine, et calculez sa distance à l'origine. Même question avec le plan d'équation $ux + vy + wz = h$.

5. *a*) Montrez qu'un parallélépipède rectangle, d'aire constante, a un volume maximal quand c'est un cube.

b) Déterminez le volume du plus grand parallélépipède rectangle que l'on peut inscrire dans l'ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

c) Déterminez une équation du plan passant par la point $\mathrm{A}(1,2,1)$ qui découpe dans le premier octant (défini par les conditions $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$) un tétraèdre de volume minimal.



6. Recherchez les extrema des fonctions suivantes :

(*i*) $x^2 + 4y^2 - 4x$; (*ii*) $x^2 + xy + y^2 - 2x - 6y$; (*iii*) $x^3 + y^3 - 3xy$;
(*iv*) $(x-y)(1-xy)$; (*v*) $2x^3 - 2x^2y + xy^2 - y^3 - 3x + 3y$;
(*vi*) $\sin x + \sin y + \cos(x+y)$.