Université de Paris-Sud, année 2005/2006
Filière PCST-L2
Maths 255 (Harari-Alfonsi)

Feuille d'exercices de mathématiques numéro 6bis

Dérivées partielles, différentielles (compléments)

1. Soient a un point de $\mathbf{R}^n$ et r un réel > 0. On note $B_f(a,r)$ la *boule fermée* de centre a et de rayon r, c'est-à-dire l'ensemble des point u de $\mathbf{R}^n$ tels que $|| u - a || \leq r$ (si $n = 2$, c'est simplement le disque fermé de centre a et de rayon r).

On admettra le résultat suivant : si f est une application continue de $B_f(a,r)$ dans $\mathbf{R}$, alors il existe un point u_0 de $B_f(a,r)$ tel que pour tout u de $B_f(a,r)$, on ait $f(u) \leq u_0$ (la fonction f admet un *maximum absolu* en u_0).

a) Montrer qu'il existe un point u_1 de $B_f(a,r)$ tel que pour tout u de $B_f(a,r)$, on ait $f(u) \geq u_1$ (f admet un *minimum absolu* en u_1).

b) Soit maintenant g une application différentiable de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$. Existe-t-il toujours un point u de $\mathbf{R}^n$ tel que $df(u) = 0$?

c) Soit g une application différentiable de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$. On suppose qu'il existe un réel $r > 0$ et un réel C tel que $f(u) = C$ pour tout u de norme r. Montrer qu'il existe un point u_0 de la boule ouverte $B(0,r)$ tel que l'une des deux propriétés suivantes soit vérifiée :

i) pour tout u de $B_f(0,r)$, on a $f(u) \leq f(u_0)$.

ii) pour tout u de $B_f(0,r)$, on a $f(u) \geq f(u_0)$.

d) En déduire que $df(u_0) = 0$.

2. Soit f l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^3$. Trouver les extrema locaux de cette fonction. Sont-ils absolus ? Mêmes questions avec l'application $f(x,y) = x^3 + 2xy + y^2$.