Université de Paris-Sud, année 2005/2006
Filière PCST-L2
Maths 255 (Harari-Alfonsi)

Feuille d'exercices de mathématiques numéro 6

Fonctions de plusieurs variables : dérivées partielles, différentielles

1. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction différentiable.

a) On pose $g(x) = f(x^2+1, \sin x)$. Calculer la dérivée $g'(x)$ de g en fonction des dérivées partielles de f.

b) On pose maintenant $h(x,y) = f(x^2+y+1, \cos x + y^2)$. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)$ en fonction des dérivées partielles de f.

c) Soit u l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par

$$u(x,y) = (f(x^2,y^2), f(x,y)^2)$$

Écrire la matrice jacobienne de u en $(0,0)$ en fonction des dérivées partielles de f.

2. Soit f la fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par

$$f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

a) Calculer la matrice jacobienne $J_f(r,\theta)$ de f en un point (r,θ).

b) En quel(s) point(s) (r,θ) de $\mathbf{R}^2$ la matrice $J_f(r,\theta)$ est-elle inversible ?

c) Mêmes questions avec l'application g de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par

$$g(r,\theta,\varphi) = (r\cos\theta, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi)$$

3. Soient f une fonction différentiable de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$. On pose $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$

a) Écrire les dérivées partielles de l'application g de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$g(x,y) = \| f(x,y) \|^2$$

en fonction des dérivées partielles de f_1 et f_2.

b) On suppose que la fonction g est constante, c'est-à-dire qu'il existe un réel λ fixé tel que $g(x, y) = \lambda$ pour tout (x, y) de $\mathbf{R}^2$. Que peut-on en déduire ?

c) On garde l'hypothèse de b). Soit (a, b) un point de $\mathbf{R}^2$ tel que la matrice jacobienne de f en a soit inversible. Que vaut $f(a, b)$?

4. Soit f la fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

a) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$.

b) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

c) Soit g_1 la fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par $g_1(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$. Montrer que g admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ et les calculer.

d) Mêmes questions avec $g_2(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.