fonctions de plusieurs variables : continuité, différentielles, gradient

exercices

1. Étudiez la continuité de la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Étudiez la continuité de f à l'origine. (*Indication.* Utilisez un développement limité du sinus au voisinage de 0.)

b) La fonction f possède-t-elle des dérivées partielles ?

c) Est-elle de classe $\mathscr{C}^1$?

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Étudiez la continuité de la fonction f à l'origine.

Indication. Faites suivre au point (x,y) l'arc paramétré défini par $x = t^3, \quad y = t$.

b) Étudiez celle des applications partielles $f(x,*)$ et $f(*,y)$.

c) La fonction f possède-t-elle des dérivées partielles ?

4. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Montrez que f est de classe $\mathscr{C}^1$.

b) Calculez $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Quelle conclusion en tirez-vous ?

5. Calculez les dérivées aux points et suivant les vecteurs indiqués des fonctions :

(*i*) $\ln(x^2+y^2)^{1/2}$ en $(1,1)$ suivant $(2,1)$;

(*ii*) $xy+yz+zx$ en $(-1,1,7)$ suivant $(3,4,-12)$;

(*iii*) $4x^2+9y^2$ en $(2,1)$ suivant la direction de variation maximale.

6. Soit f une fonction différentiable sur $\mathbf{R}^2$. On suppose qu'il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que, quels que soient les réels t, x, y, on ait

$$f(tx,ty) = t^m f(x,y).$$

Montrez que f vérifie la *relation d'Euler :*

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = mf(x,y).$$

Indication. Posez $\varphi(t) = f(tx,ty)$ et calculez $\varphi'(t)$.