Université de Paris-Sud, année 2005/2006
Filière PCST-L2
Maths 255 (Harari-Alfonsi)

Feuille d'exercices de mathématiques numéro 4

Fonctions de plusieurs variables : limites

1. Pour les fonctions suivantes de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, donner leur ensemble de définition et dire (en justifiant la réponse) lesquelles sont définies au voisinage de $(0,0)$:

a) $f(x,y) = \sqrt{x} + y^2$

b) $f(x,y) = \tan(x+y)$

c) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2-1}$

2. Soit f la fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Soit a un réel. Montrer que si $f(x,y)$ tend vers a quand (x,y) tend vers $(0,0)$, alors nécessairement $a = 0$.

c) Montrer que $f(x,y)$ ne tend *pas* vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$. Ainsi f n'a pas de limite au point $(0,0)$, ou encore n'est pas continue en $(0,0)$.

3. On rappelle que la *dérivée partielle* (quand elle existe) $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ d'une fonction de deux variables $f(x,y)$ en un point (a,b) est par définition la dérivée au point a de la fonction d'une variable $x \mapsto f(x,b)$. De même la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ est la dérivée au point b de la fonction d'une variable $y \mapsto f(a,y)$.

Calculer les dérivées partielles en un point (a,b) des fonctions suivantes :

a) $f(x,y) = xy$.

b) $f(x,y) = x\cos(\sin y)$.

c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+1}$.

4. Soit f la fonction définie comme dans l'exercice **2.**.

a) Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent, et les calculer.

b) Soit (a,b) un point de $\mathbf{R}^2$ autre que $(0,0)$. Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ existent, et les calculer.

c) Soit D l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par $D(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$. L'application D admet-elle une limite en $(0,0)$?

5. Soit f l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = x\cos y + \sin y$.

a) Montrer que

$$| f(x,y) - x - y | \leq | x | .(1 - \cos y) + | y | . | \frac{\sin y}{y} - 1 |$$

b) Montrer que quand y tend vers 0, les expressions $(1-\cos y)$ et $| \frac{\sin y}{y} - 1 |$ tendent vers 0.

c) En déduire qu'on peut écrire

$$f(x,y) = x + y + || (x,y) || .\varepsilon(x,y)$$

où $\varepsilon(x,y)$ est une fonction qui tend vers 0 en $(0,0)$. On rappelle que par définition, $|| (x,y) || = \sqrt{x^2+y^2}$ est la norme du vecteur (x,y).