Déterminants et applications

exercices

1. Calculez les déterminants suivants :

$$(i)\ \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix}; \qquad (ii)\ \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \qquad (iii)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

2. Montrez que $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3.$

3. En calculant le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ de deux façons différentes, démontrez l'identité remarquable :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

4. Calculez le déterminant : $\begin{vmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ \cos(a+h) & \cos(b+h) & \cos(c+h) \\ \cos(a+2h) & \cos(b+2h) & \cos(c+2h) \end{vmatrix}.$

Indication. Utilisez l'exponentielle complexe.

5. Calculez les déterminants suivants (le second se ramène au premier) :

$$(i)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 & \dots & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix} \; ; \qquad (ii)\quad \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

6. Résolvez à l'aide des formules de CRAMER les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$(i)\quad \begin{cases} x+3y-\ \ z=9, \\ 2x-6y+\ \ z=11, \\ 4x+9y-7z=38. \end{cases} \qquad (ii)\quad \begin{cases} x+ay+a^2z=a^3, \\ x+by+b^2z=b^3, \\ x+cy+c^2z=c^3. \end{cases}$$

7. Calculez les aires des triangles dont les sommets sont les points :

(i) A$(0,2,2)$, B$(2,0,-1)$, C$(3,4,0)$; (ii) A$(-2,2,1)$, B$(1,-3,4)$, C$(1,2,1)$.

8. Calculez les volumes des parallélépipèdes dont les sommets sont l'origine et les points :

(i) A$(1,1,3)$, B$(1,2,-1)$, C$(1,4,1)$; (ii) A$(-2,3,1)$, B$(0,1,0)$, C$(-4,3,2)$.

9. Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ des vecteurs de $\mathbf{R}^3$. Montrez que

$$(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}+(\vec{v}\wedge\vec{w})\wedge\vec{u}+(\vec{w}\wedge\vec{u})\wedge\vec{v}=\vec{0}.$$

10. Montrez que $\left[\vec{u}\wedge\vec{v}, \vec{v}\wedge\vec{w}, \vec{w}\wedge\vec{u}\right]=\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]^2$.