

Feuille d'exercices de mathématiques numéro 2

Déterminants

1. a) Calculer les déterminants des matrices suivantes (θ, x_1, x_2, x_3 sont des paramètres réels) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}$$

b) A quelle condition sur x_1, x_2, x_3 la dernière matrice ci-dessus est-elle inversible ?

2. Soit M une matrice (n, n) à coefficients réels. On note I la matrice identité (n, n) .

a) Soit λ un réel tel que le déterminant de la matrice $(M - \lambda I)$ soit nul. Montrer qu'il existe un vecteur non nul x de \mathbf{R}^n tel que $M.x = \lambda x$.

b) La réciproque est-elle vraie ?

3. Soit M une matrice (n, n) à coefficients *entiers relatifs*.

a) Montrer que le déterminant de M est un entier relatif.

b) On suppose que de plus que $\det M$ est non nul. Montrer que si M^{-1} est à coefficients entiers relatifs, alors $\det M$ vaut 1 ou -1 .

4. Soit \mathcal{B} une base de \mathbf{R}^3 . On considère trois vecteurs v_1, v_2, v_3 de \mathbf{R}^3 et on appelle d le déterminant de (v_1, v_2, v_3) dans la base \mathcal{B} .

a) Quel est le déterminant de (v_2, v_1, v_3) dans la base \mathcal{B} ? Et celui de (v_2, v_3, v_1) ?

b) Une *permutation* de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ est une bijection f de $\{1, 2, 3\}$ dans lui-même. Pour chaque permutation f de $\{1, 2, 3\}$, calculer le déterminant de $(v_{f(1)}, v_{f(2)}, v_{f(3)})$ dans la base \mathcal{B} (on comptera d'abord combien il y a de permutations de $\{1, 2, 3\}$).