Université de Paris-Sud, année 2005/2006
Filière PCST-L2
Maths 255 (Harari-Alfonsi)

Feuille d'exercices de mathématiques numéro 10

Différentielles extérieures, formule de Green-Riemann

1. Calculer les différentielles extérieures $d\alpha$ des formes de degré 1 sur $\mathbf{R}^3$ suivantes (on exprimera le résultat sous la forme d'une expression du type $P(x,y,z)\,dxdy + Q(x,y,z)\,dydz + R(x,y,z)\,dzdx$) :

a) $\alpha = xy^2z\,dx + xyz\,dy + x^2y^2z^2\,dz$

b) $\alpha = \sin x \cos y\,dx + \sin z\,dy + \cos x \cos y \cos z\,dz$

2. Soit α la forme différentielle définie par

$$\alpha = \frac{dx}{yz} + \frac{dy}{zx} + \frac{dz}{xy}$$

a) Déterminer le sous-ensemble U de $\mathbf{R}^3$ sur lequel α est définie. Est-il convexe ?

b) Calculer la différentielle extérieure $d\alpha$ de α.

c) Trouver une fonction $f : U \to \mathbf{R}$ (de classe C^1) telle que la forme $f\alpha$ soit fermée.

3. Soit h un réel > 0. Soit α la forme définie sur $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ par

$$\alpha = \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{(x^2+y^2)^h}$$

a) Pour quelles valeurs de h la forme α est-elle fermée ?

b) Pour quelles valeurs de h la forme α est-elle exacte ?

4. a) Calculer l'aire d'une ellipse dont les axes ont pour longueur $2a$ et $2b$.

b) Soit c la courbe plane définie, pour $t \in [-\pi, \pi]$, par

$$c(t) = (\sin t, t^2)$$

Montrer que c'est une courbe fermée simple, et calculer l'aire du domaine qu'elle délimite.

5. Soit $\alpha = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ une forme différentielle fermée sur $\mathbf{R}^2$. Soient c_1 et c_2 deux courbes planes C^1 partant d'un point a et arrivant en un point b. Montrer que

$$\int_{c_1} \alpha = \int_{c_2} \alpha$$