Université Paris-Sud
Math 255 (Calcul différentiel pour la physique)
2005/2006

Feuille d'exercices de mathématiques numéro 1

1. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y) = (2x + y, x - y)$$

a) Montrer que f est bijective.

b) Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$.

c) Soit $v_1 = (1, -1)$ et $v_2 = (1, 1)$. Montrer que (v_1, v_2) est une base de $\mathbf{R}^2$ et écrire la matrice de f dans cette base.

2. On considère dans $\mathbf{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, -1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 1)$.

a) Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

b) Écrire la matrice de passage M de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, puis de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique.

c) Soit V l'ensemble des vecteurs x de $\mathbf{R}^3$ qui vérifient $M.x = -x$. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ et calculer sa dimension. Mêmes questions avec l'ensemble W des vecteurs y de $\mathbf{R}^3$ qui vérifient$M.y = y$.

3. Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ définie dans la base canonique par la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Soient $v_1 = (1, 0)$ et $v_2 = (2, 1)$. Montrer que (v_1, v_2) est une base de $\mathbf{R}^2$ et déterminer la matrice N de f dans cette base.

b) Calculer N^2, puis N^3.

c) Calculer N^m pour un entier positif m quelconque.

d) Quelle est la matrice de f^m dans la base (v_1, v_2) ? En déduire la matrice de f^m dans la base canonique.

4. Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculer la dimension du noyau de f, puis le rang de f.

b) Soient λ un réel et V_λ l'ensemble des vecteurs x de $\mathbf{R}^3$ tels que $f(x) = \lambda x$. Montrer que V_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

c) Montrer que si λ est différent de 0 et de 3, alors $V_\lambda = \{0\}$.

d) Calculer la dimension de V_λ si $\lambda = 3$.