Université de Paris-Sud, année 2005/2006
Filière PCST-L2
Maths 255 (D. Harari)

Partiel, 25 octobre 2005 (durée : 2 heures)

Exercice 1. (7 points)

Soient a, b, c trois réels. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

a) Soit λ un réel. Écrire la matrice $A - \lambda I$, où I est la matrice identité.

b) Calculer le déterminant de $(A - \lambda I)$ en fonction de a, b, c et λ.

c) Les nombres a, b, c étant fixés, on note $D(\lambda)$ le déterminant de $(A-\lambda I)$. Montrer qu'il existe au moins une valeur réelle de λ telle que $D(\lambda) = 0$.

d) On choisit un réel λ tel que $D(\lambda) = 0$. Montrer qu'il existe au moins un vecteur x *non nul* de $\mathbf{R}^2$ tel que le vecteur $A.x$ soit égal au vecteur λx.

e) Soit B une matrice de $\mathbf{R}^2$. On suppose que B est égale à sa matrice transposée. Déduire de d) qu'il existe un vecteur non nul y de $\mathbf{R}^2$ tel que le vecteur $B.y$ soit colinéaire à y.

Exercice 2. (5 points)

Soit $u = (a, b, c)$ un vecteur de $\mathbf{R}^3$. On appelle f_u l'application de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par $f_u(x) = u \wedge x$, où $\wedge$ est le produit vectoriel.

a) Quel est le noyau de f_u ? Préciser sa dimension (on distinguera les cas $u = 0$ et $u \neq 0$).

b) Écrire la matrice de l'application f_u en fonction de (a, b, c). Quel est le déterminant de cette matrice ?

c) Soient M une matrice $(3, 3)$ et ${}^tM$ sa transposée. On suppose que $M = -{}^tM$. Montrer que $\det M = 0$.

d) Pour quel(s) n le résultat de c) se généralise-t-il à une matrice (n, n) ?

Exercice 3. (4 points)

Calculer les limites éventuelles en $(0,0)$ des fonctions suivantes de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ (s'il n'y a pas de limite, on demande de le justifier) :

a) $f(x,y) = \frac{x}{y^2}$

b) $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

c) $f(x,y) = \frac{\cos x + \cos y - x - y}{x^2+y^2}$

Exercice 4. (4 points)

Soit $f(x,y)$ l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

a) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.

b) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

c) Soit g l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par

$$g(x,y) = (f(x,y), f(x,1))$$

Écrire la matrice jacobienne de g en un point (x,y) autre que $(0,0)$, puis la matrice jacobienne de g en $(0,0)$.