Université de Paris-Sud, année 2005/2006
Filière PCST-L2
Maths 255 (D. Harari)

Examen, 5 janvier 2006 (durée : 3 heures)

Exercice 1. : Algèbre linéaire (4 points).

Soit $M_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices réelles à n lignes et n colonnes. On dit qu'une matrice A de $M_n(\mathbf{R})$ est *semblable* à une matrice B de $M_n(\mathbf{R})$ s'il existe une matrice inversible P telle que $A = PBP^{-1}$.

a) Montrer que toute matrice A est semblable à elle-même; montrer aussi que si A est semblable à B, alors B est semblable à A. On dit alors que A et B sont semblables.

b) Montrer que si A et B sont semblables, alors $\det A = \det B$.

c) Soient I la matrice identité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $M_2(\mathbf{R})$ et J la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que I et J ne sont pas semblables. Quels sont leurs déterminants ?

Exercice 2 : Calculs de déterminants (3 points).

Soit a un réel. On considère les deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$: $v_1 = (1, a, a^2)$ et $v_2 = (0, 1, a)$.

a) Calculer le produit vectoriel $v_1 \wedge v_2$.

b) Soit $v_3 = (2, 1, 0)$. Calculer le produit mixte $[v_1, v_3, v_2]$.

c) Quel est le volume du parallélépipède engendré par les trois vecteurs (v_1, v_2, v_3) ?

Exercice 3 : Fonctions de plusieurs variables (7 points).

Soit f la fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x, y) = xe^y + x^3$.

a) Calculer les dérivées partielles et les dérivées partielles secondes de f en un point quelconque (x, y).

b) Déterminer si f admet des extrema locaux, et si oui si ce sont des minima ou des maxima.

c) On pose maintenant $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Calculer $\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta)$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta)$ en fonction de r et θ.

d) Soit u l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par $u(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$. On appelle $M(r,\theta)$ la matrice jacobienne de u en (r,θ) (c'est donc une matrice qui a deux lignes et deux colonnes). On pose $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$.

Exprimer le vecteur-colonne $\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) \\ \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) \end{pmatrix}$ en fonction de $M(r,\theta)$ et du vecteur colonne $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$.

e) Montrer que si $r\neq 0$, la matrice $M(r,\theta)$ est inversible.

f) Soit r un réel non nul et θ un réel. La fonction g peut-elle avoir un extremum local en (r,θ) ?

Exercice 4 : Intégrales curvilignes et de surfaces (7 points).

On rappelle les formules de trigonométrie $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1-2\sin^2 x$, $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

Soit c la courbe du plan définie pour $t\in[0,2\pi]$ par $c(t)=(1+\cos t, 2\sin t)$.

a) Montrer que c est une courbe fermée et simple.

b) Calculer l'aire du domaine D délimité par la courbe c.

c) Soit α la forme différentielle $\alpha = xdx+ydy$. Calculer l'intégrale curviligne $\int_c \alpha$.

d) Déterminer la différentielle extérieure $d\alpha$, que l'on exprimera sous la forme $d\alpha = P(x,y)dxdy$.

e) Calculer l'intégrale double

$$\iint_D P(x,y)dxdy$$

.

f) Soit S la surface paramétrée ("sphère de centre 0 et de rayon 1") de $\mathbf{R}^3$ définie par $s(\theta,\varphi)=(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$, pour $\theta\in[-\pi/2,\pi/2]$ et $\varphi\in[-\pi,\pi]$. Calculer le flux F du champ de vecteurs $w(x,y,z)=(x,y,0)$ à travers S.

g) Soit B l'intérieur de la sphère S ("boule de centre 0 et de rayon 1"). Calculer la divergence de w, et en déduire le volume de B en utilisant f).