Université Paris-Sud
Math 255 (Calcul différentiel pour la physique)
Filière PCST, 2005/2006

Devoir de vacances

Formes différentielles, intégrales de surfaces

Exercice 1. : Vrai ou faux ?

Parmi les assertions suivantes, démontrer celles qui sont justes et donner un contre-exemple pour celles qui sont fausses (on indiquera d'abord si l'assertion est vraie ou fausse).

a) Si une forme différentielle α définie sur une partie D de $\mathbf{R}^2$ est exacte, alors D est convexe.

b) Soient r un réel > 0 et B la boule ouverte de centre O et de rayon r (c'est-à-dire l'ensemble des x de $\mathbf{R}^3$ tels que la distance de x à 0 soit $< r$). Alors toute forme différentielle fermée sur B est exacte.

c) Si α est une forme différentielle sur $\mathbf{R}^2$, alors l'intégrale de α le long de toute courbe de $\mathbf{R}^2$ est nulle.

d) Soit S une surface qui est le bord d'un domaine D de $\mathbf{R}^3$. Soient w_1 et w_2 deux champs de vecteurs C^1 dans $\mathbf{R}^3$. Si $\mathrm{Div}\, w_1 = \mathrm{Div}\, w_2$, alors les flux de w_1 et w_2 à travers S sont les mêmes.

Exercice 2. : Formules d'analyse vectorielle

On rappelle que le *laplacien* d'une fonction $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ (supposée C^2) est donné par $\Delta(f) = \mathrm{Div}\,(\mathrm{Grad}\, f)$.

a) Rappeler l'expression du laplacien en fonction des dérivées partielles secondes de f.

b) Soient f et g deux fonctions. Montrer la formule

$$\Delta(fg) = f.\Delta(g) + g.\Delta(f) + (\mathrm{Grad}\, f, \mathrm{Grad}\, g)$$

où $(\mathrm{Grad}\, f, \mathrm{Grad}\, g)$ est le produit scalaire des deux vecteurs $\mathrm{Grad}\, f$ et $\mathrm{Grad}\, g$.

c) Soient v et w deux champs de vecteurs. Montrer la formule

$$\mathrm{Div}\,(v \wedge w) = (w, \mathrm{Rot}\, v) - (v, \mathrm{Rot}\, w)$$

Exercice 3. : Flux d'un champ de vecteurs

Soit F le champ de vecteurs dans $\mathbf{R}^3$ défini par

$$F(x,y,z) = (x^2 - yz, y^2 - zx, z^2 - xy)$$

a) Est-ce que F dérive d'un potentiel scalaire ?

b) Est-ce que F dérive d'un potentiel vecteur ?

c) Soient R un réel > 0 et S la surface d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2R(x + y + z) + 2R^2 = 0$$

Montrer que S est une sphère, dont on précisera le centre et le rayon.

d) Donner un paramétrage $(u, v) \mapsto s(u, v)$ de S telle que la normale à S correspondante soit sortante.

e) Calculer le flux du champ F à travers la surface S orientée par la normale sortante.