Université Paris-Sud
Math 255 (Calcul différentiel pour la physique)
Filière PCST, 2005/2006

Devoir à la maison numéro 2

Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1. : Différentielles et fonctions composées

Pour toute application différentiable f de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ et , tout point a de $\mathbf{R}^n$, on note $J_f(a)$ la matrice jacobienne de f en a, et $\det_f(a)$ le *jacobien* de f en a, c'est-à-dire le déterminant de la matrice $J_f(a)$.

a) Soient f et g deux applications différentiables de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$, on note $h = g \circ f$ l'application composée définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Exprimer $\det_h(a)$ en fonction des jacobiens de f et g.

b) On suppose maintenant que f et g sont deux applications différentiables de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ telles que pour tout x de $\mathbf{R}^n$, on ait $g(f(x)) = x$. Comparer les matrices jacobiennes de f et g, puis les jacobiens de f et g.

c) Soit f l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Montrer que pour tout a de $\mathbf{R}^2$, on a $\det_f(a) \neq 0$.

d) On reprend l'application f de la question c). Est-elle injective ? En déduire qu'il n'existe pas d'application g telle que $g(f(x)) = x$ pour tout x de $\mathbf{R}^2$.

Exercice 2. : Dérivées partielles et accroissements finis

Soit f une application de classe C^1 de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$. On fixe $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ et on note φ l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $\varphi(t) = f(tx_1, tx_2)$.

a) Calculer la dérivée $\varphi'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f. En déduire que

$$\varphi'(t) = df(tx_1, tx_2).(x_1, x_2)$$

b) On rappelle le théorème de Rolle : si u est une application dérivable de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ telle que $f(0) = f(1)$, alors il existe $c \in]0, 1[$ tel que $u'(c) = 0$. Montrer que si v est une application dérivable de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $v(1) - v(0) = v'(c)$; indication : on posera $u(t) = v(t) + t(v(0) - v(1))$.

c) Déduire de a) et b) qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que

$$f(x) - f(0, 0) = df(cx).x$$

(on rappelle que x désigne le vecteur (x_1, x_2) et tx est le produit de ce vecteur par le réel t).

d) Montrer qu'il existe un point θ situé sur le segment ouvert joignant $(0, 0)$ à $x = (x_1, x_2)$, vérifiant

$$f(x) - f(0, 0) = df(\theta).x$$

e) Soit g une application C^1 de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$. Soient a et b deux points de $\mathbf{R}^2$. On pose $f(x) = g(x + a)$. En appliquant d) avec $x = b - a$, montrer qu'il existe un point m, situé sur le segment ouvert joignant a à b, tel que

$$g(b) - g(a) = dg(m).(b - a)$$

(*Théorème des accroissements finis pour une fonction de* $\mathbf{R}^2$ *dans* $\mathbf{R}$).

f) Peut-on généraliser le résultat précédent à une fonction de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$?

Exercice 3. : Extremums locaux

a) Soit f l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = x^4 + y^4$. Montrer que les dérivées partielles et les dérivées partielles secondes de f sont toutes nulles en $(0,0)$.

b) f admet-elle un extremum local en $(0,0)$? Si oui on précisera s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.

c) Reprendre les questions précédentes avec l'application f définie par

$$f(x,y) = x^3 + y^3$$