Université Paris-Sud
Math 255 (Calcul différentiel pour la physique)
Filière PCST, 2005/2006

Devoir à la maison numéro 1

Algèbre linéaire

Exercice 1. : Vrai ou faux ?

Parmi les assertions suivantes, démontrer celles qui sont justes et donner un contre-exemple pour celles qui sont fausses (on indiquera d'abord si l'assertion est vraie ou fausse).

a) Il n'existe pas d'application linéaire bijective de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$.

b) Toute application bijective de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ est linéaire.

c) Si A et B sont deux matrices réelles (n, n) telles que le produit AB soit une matrice inversible, alors les matrices A et B sont toutes deux inversibles.

d) Soit A une matrice réelle telle que A^{2005} soit de déterminant 1. Alors A est de déterminant 1.

e) Soient n un entier au moins égal à 2 et λ un réel. Alors il existe une infinité de matrices (n, n) dont le déterminant est λ.

Exercice 2. : Changement de base

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$ et $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ une autre base de $\mathbf{R}^2$. On pose $v_1 = (a, b)$ et $v_2 = (c, d)$, et on note

$$P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

la *matrice de passage* de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

a) Soit $u = (x, y) = xe_1 + ye_2$ un vecteur de $\mathbf{R}^2$, on décompose u dans la base $\mathcal{B}'$, soit $u = x'v_1 + y'v_2$, et on pose $u' = (x', y')$. Montrer l'égalité

$$u = P.u'$$

(*formule de changement de base pour les vecteurs*).

b) Soit maintenant f une application linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$, on note M sa matrice dans la base canonique (on a donc $f(u) = M.u$). On décompose $f(u)$ sous la forme $f(u) = \alpha v_1 + \beta v_2$. Montrer que le vecteur (α, β) de $\mathbf{R}^2$ vérifie $(\alpha, \beta) = P^{-1}(M.u)$, puis que $(\alpha, \beta) = (P^{-1}MP).u'$.

c) En déduire que si M' est la matrice de f dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$, on a

$$M' = P^{-1}MP$$

(*formule de changement de base pour les matrices*)

d) Avec les notations ci-dessus, montrer que $\det M = \det M'$.

On dit que $\det M$ est le *déterminant de l'endomorphisme f.* D'après la question d), il ne dépend que de f, et pas de la base dans laquelle on l'exprime (contrairement au déterminant d'une famille de vecteurs qui dépend de la base). Ceci est valable en dimension quelconque (preuve similaire).

Exercice 3. : Endomorphismes symétriques, antisymétriques

On dit qu'une matrice $(3,3)$ est *symétrique* si elle est égale à sa transposée, *antisymétrique* si elle est égale à l'opposée de sa transposée.

a) Parmi les matrices suivantes, dire lesquelles sont symétriques et lesquelles sont antisymétriques :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Soit f une application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$. On dit que f est *symétrique* (respectivement *antisymétrique*) si elle vérifie $f(u).v = u.f(v)$ (respectivement $f(u).v = -u.f(v)$) pour tous vecteurs u et v de $\mathbf{R}^3$, où . est le produit scalaire canonique. Montrer que si f est symétrique, sa matrice dans la base canonique est symétrique. Même question en remplaçant symétrique par antisymétrique.

c) Montrer la réciproque : si f est une application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est symétrique, alors f est symétrique. Même question en remplaçant symétrique par antisymétrique.

d) Soit v un vecteur fixé de $\mathbf{R}^3$. Montrer que l'application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ qui à un vecteur x associe le produit vectoriel canonique $v \wedge x$ est antisymétrique.

e) Soit M une matrice antisymétrique de $\mathbf{R}^3$. Montrer qu'il existe a, b, c dans $\mathbf{R}$ tels que

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

f) Calculer le produit vectoriel du vecteur $(-c, b, a)$ par un vecteur quelconque (x_1, x_2, x_3).

g) En déduire la réciproque de e) : si f est une application linéaire antisymétrique de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$, alors il existe un vecteur v de $\mathbf{R}^3$ telle que f soit l'application $x \mapsto v \wedge x$.