Université de Paris-Sud, année 2005/2006
Filière PCST-L2
Maths 255 (Harari-Alfonsi)

Corrigé du test numéro 3

Exercice 1. a) Dire que w dérive d'un potentiel (scalaire) est équivalent au fait que la forme α soit exacte (par définition). On peut aussi noter que comme ici cette forme est définie sur $\mathbf{R}^2$ tout entier, c'est équivalent à dire que α est fermée.

b) D'après a), il s'agit de vérifier si la forme α associée à w est fermée. Posons $w(x,y) = P(x,y), Q(x,y)$. Si $w(x,y) = (2xy, \cos y + x^2)$, on voit que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

donc α est fermée et w dérive bien d'un potentiel. Pour $w(x,y) = (\ln(1 + x^2) + y, x^2 - y)$, on trouve

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

donc ce champ ne dérive pas d'un potentiel.

Exercice 2.

On applique la formule. L'intégrale curviligne cherchée vaut

$$\int_0^1 w(c(t)).c'(t)dt$$

où w est le champ de vecteur associé à la forme α, $c'(t)$ le vecteur dérivé de $c(t)$, et $w(c(t)).c'(t)$ le produit scalaire des deux vecteurs $w(c(t))$ et $c'(t)$. Ici $c'(t) = (1, 2t, 3t^2)$.

a) $\alpha = xdx + ydy + zdz$. Ici $w(c(t)) = (t, t^2, t^3)$ et donc $w(c(t)).c'(t) = t + 2t^3 + 3t^5$. On obtient que l'intégrale vaut

$$[1/2t^2 + 1/2t^4 + 1/2t^6]_0^1 = 3/2$$

b) On a $w(c(t)) = (t^2 - t^4, 0, t^3 - 1$ soit $w(c(t)).c'(t) = t^2 - t^4 + 3t^2(t^3 - 1) = 3t^5 - t^4 - 2t^2$. L'intégrale vaut donc

$$[1/2t^6 - 1/5t^5 - 2/3t^3]_0^1 = 1/2 - 1/5 - 2/3 = -11/30$$

Exercice 3.

a) α fermée signifie que sa différentielle extérieure est nulle, i.e. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. α exacte signifie qu'il existe une fonction f telle que $\alpha = df$, i.e. telle que $P(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$.

b) On peut remarquer que D n'est pas convexe, donc il pourrait exister sur D des formes fermées non exactes. Ceci dit on voit tout de suite que pour $f = -1/x - 1/y$, on a $df = \alpha$ donc α est bien exacte.