Université de Paris-Sud, année 2005/2006
Filière PCST-L2
Maths 255 (Harari-Alfonsi)

Corrigé et commentaires pour le test numéro 1

Exercice 1.

a) C'est vrai, comme indiqué dans le cours. On peut revérifier directement que le noyau d'une application linéaire f, qui est l'ensemble des vecteurs x tels que $f(x) = 0$, contient 0, est stable par somme, et est stable pour le produit par un réel. Attention à ne pas confondre cela avec des égalités du genre "$\ker \lambda f = \lambda \ker f$" qui n'avaient pas grand chose à voir avec la question posée.

b) C'est faux, car il s'agit de l'application qui à (a, b, c, d) associe $ad - bc$. Cette application n'est pas linéaire car si on multiplie par exemple (a, b, c, d) par un réel λ, le résultat est multiplié par λ^2. Il y a eu pas mal d'erreurs ici, notamment parce que certains croient encore que si A est une matrice, $\det(\lambda A) = \lambda \det A$ (au lieu de $\lambda^2 \det A$). D'autres ont confondu avec le fait que si on fixe un vecteur v_1 de $\mathbf{R}^2$, l'application qui à un vecteur x associe $\det(v_1, x)$ est linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$. Rappelons donc que le déterminant de deux vecteurs est bilinéaire, pas linéaire.

c) C'est vrai car $\det(A^2) = (\det A)^2$ puisque le déterminant d'un produit est le produit des déterminants. Or le carré d'un réel est toujours positif ou nul. Il y a eu des erreurs ici, certains pensant construire des contre-exemples (en se trompant dans le calcul). D'autres n'ont pas bien justifié le résultat en essayant de le vérifier directement avec la formule explicite du déterminant $(2, 2)$ (en général sans succès !), ce qui d'ailleurs ne donnerait pas le résultat en dimension quelconque.

d) C'est vrai, tout simplement parce que l'égalité dit exactement que $A.(A^2) = I$, ainsi non seulement A est inversible mais son inverse est A^2. On pouvait aussi remarquer que $\det(A^3) = 1$, donc $(\det A)^3 = 1$, donc $\det A$ n'est pas nul. Beaucoup ont cru que le résultat était faux en invoquant le fait que "l'inverse doit être A^{-1}". Ceci n'a aucun sens, A^{-1} nétant qu'une notation pour désigner l'inverse de A quand il existe; rien n'interdit donc à l'inverse de A d'être égal à A^2 (c'est par exemple le cas si $A = I$, auquel cas son inverse est aussi bien A que A^2...).

e) C'est encore vrai. Cette question a été en général bien réussie, beaucoup remarquant qu'il suffisait d'utiliser la formule $n = \dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f$. Il y a juste eu quelques cafouillages sur la définition de l'image ou du noyau, certains semblant penser que ce sont des entiers alors que ce sont des sous-espaces vectoriels.

Exercice 2.

Ces questions ont été en général bien faites. On trouvait 0 pour le premier déterminant et -2 pour le second. Une mention spéciale à ceux qui ont remarqué que dans le premier déterminant, la deuxième ligne était multiple de la première ce qui permettait de conclure sans faire le calcul. Pour le second déterminant, le mieux était de developper par rapport à la première colonne pour n'avoir qu'un terme non nul. Il ne fallait alors pas oublier le signe $-$ venant de la règle des signes.

Exercice 3.

a) D'après ce qu'on a vu en cours, on a $k \wedge j = -i$ et $k \wedge i = j$. Une base orthonormée directe le reste si on permute circulairement les vecteurs, par contre elle devient indirecte si on en échange deux.

b) On a $(i+j) \wedge (k+i) = i \wedge k + i \wedge i + j \wedge k + j \wedge i$. Or $i \wedge k = -j$ et $j \wedge k = i$ par antisymétrie. De même $j \wedge i = -k$, tandis que $i \wedge i = 0$ vu que i est colinéaire à lui-même. Finalement $(i+j) \wedge (k+i) = i - j - k$. Il y a eu pas mal d'erreurs de signe sur cette question.

La question sur le produit mixte $[(k+i), (i+j), (i+k)]$ a été la plus mal réussie du test. Beaucoup avaient oublié la définition, et croient que le produit mixte $[u, v, w]$ est le vecteur $(u \wedge v) \wedge w$ alors que le produit mixte est un réel, pas un vecteur de $\mathbf{R}^3$. Le produit mixte $[u, v, w]$ est tout simplement le déterminant de (u, v, w) dans la base canonique (ou dans une base orthonormée directe), ou encore $[u, v, w]$ est le produit scalaire (pas vectoriel !) de $u \wedge v$ par w. Ceci dit ici $[(k+i), (i+j), (i+k)] = 0$, par exemple parce que la famille $((k+i), (i+j), (i+k))$ est liée (le troisième vecteur est le même que le premier). On peut aussi refaire le calcul, en se rappelant que si (i, j, k) est une bae orthonormée, les produits scalaires $i.j$, $i.k$, et $j.k$ sont nuls, tandis que $i.i$, $j.j$, et $k.k$ valent 1.