Université de Paris-Sud, année 2005/2006
Filière PCST-L2
Maths 255 (Harari-Alfonsi)

Corrigé de la feuille d'exercices de mathématiques numéro 8

Champs de vecteurs, courbes paramétrées

1. a) C'est un calcul déjà fait plusieurs fois. On a

$$\varphi'(t) = \frac{\partial u}{\partial x}(c_1(t), c_2(t)).c_1'(t) + \frac{\partial u}{\partial y}(c_1(t), c_2(t)).c_2'(t)$$

b) D'après a) et la définition du gradient, on obtient

$$\varphi'(t) = (\mathrm{Grad}\, u)(c(t)).c'(t)$$

où . désigne le produit scalaire. Bien noter ici que $(\mathrm{Grad}\, u)(c(t))$ et $c'(t)$ sont des vecteurs.

c) D'après b) et la définition de la circulation, on a

$$\mathrm{Circ}_c w = \int_a^b w(c(t)).c'(t)dt = \int_a^b \varphi'(t)dt$$

puisque $w(c(t)) = (\mathrm{Grad}\, u)(c(t))$. Ainsi $\mathrm{Circ}_c w = \varphi(b) - \varphi(a) = u(c(b)) - u(c(a))$.

d) La formule est exactement la même : on voit l'intérêt de l'expression vectorielle de b) (par rapport à l'expression en coordonnées de a) qui est plus compacte et est valable en toute dimension.

2. Si w dérive d'un potentiel, il existe une fonction f telle que $P(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$. D'après le théorème de Schwarz, on obtient que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. On retrouve le fait qu'une forme différentielle exacte est fermée (en considérant la forme $\alpha = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$).

En dimension n, on écrit $w(x_1, ..., x_n) = (P_1(x_1, ..., x_n), ..., P_n(x_1, ..., x_n))$. Si $w = \mathrm{Grad}\, f$, alors le théorème de Schwarz donne maintenant que pour toute paire $\{i, j\}$ d'indices, on a $\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}$. On obtient ainsi $n(n-1)/2$ relations.

3. On calcule d'abord le vecteur dérivé $c'(t) = (2t, 1)$.

a) Pour $w(x,y) = (x+y,y)$, on a $w(c(t)) = (t^2+t,t)$ et $w(c(t)).c'(t) = 2t(t^2+t)+t = 2t^3+2t^2+t$. La circulation est donc

$$\int_0^1 (2t^3+2t^2+t)dt = [1/2t^4+2/3t^3+1/2t^2]_0^1 = 1/2+2/3+1/2 = 5/3$$

b) Pour $w(x,y) = (\cos y, y\ln(x+1))$, on obtient $w(c(t)) = (\cos t, t\ln(t^2+1))$ et $w(c(t)).c'(t) = 2t\cos t + t\ln(t^2+1)$. La circulation est donc l'intégrale

$$\int_0^1 2t\cos t + t\ln(t^2+1)dt$$

On rappelle qu'une primitive de $\ln x$ est $u(x) = x\ln x - x$. Une primitive de $t\ln(t^2+1)$ est donc $1/2u(t^2+1)$. Ainsi

$$\int_0^1 t\ln(t^2+1)dt = 1/2(u(2)-u(1)) = 1/2(2\ln 2-1)$$

L'autre morceau se calcule par intégration par parties

$$\int_0^1 2t\cos tdt = [2t\sin t]_0^1 - \int_0^1 2\sin tdt = 2\sin 1 + 2\cos 1 - 2$$

Finalement la circulation cherchée est

$$\ln 2 + 2\sin 1 + 2\cos 1 - \frac{5}{2}$$

4. a) Seulement à condition que le champ w soit lui-même nul. Posons en effet $w(x,y) = (w_1(x,y), w_2(x,y))$. Considérons la courbe $c(t) = (t,\lambda)$ sur un intervalle $[a,b]$, où λ est une constante arbitraire. Alors

$$\int_a^b w_1(t,\lambda) = 0$$

pour tout intervalle $[a,b]$ ce qui implique que la fonction $t \mapsto w_1(t,\lambda)$ soit nulle (faire un dessin !), et ce pour n'importe quel λ. Ainsi w_1 est nul, et par symétrie w_2 également.

b) Il suffit de prendre n'importe quel champ w dérivant d'un potentiel scalaire (cf. l'exercice 1.c)), par exemple $w(x,y) = (y,x)$ qui est le gradient de la fonction $f(x,y) = xy$. Bien sûr l'hypothèse que la courbe soit fermée est ici fondamentale, on voit la différence avec a).