Université de Paris-Sud, année 2005/2006
Filière PCST-L2
Maths 255 (Harari-Alfonsi)

Corrigé du test numéro 2

Exercice 1.

a) $f(x,y) = \frac{1}{x+1} + y$ est définie au voisinage de $(0,0)$. En effet elle est définie dès que $x \neq -1$, donc par exemple pour tout (x,y) qui est à une distance $< 1/2$ de $(0,0)$.

b) $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ n'est pas définie au voisinage de $(0,0)$ car dès que x est < 0, elle n'est pas définie, si petite que soit la valeur absolue de x.

c) $f(x,y) = \ln(x+y+1)$ est définie au voisinage de $(0,0)$. Par exemple si x et y sont de valeur absolue $< 1/2$, alors $x+y$ est > -1 donc $x+y+1$ est bien strictement > 0.

Exercice 2.

a) $f(x,y) = \cos(x \sin y + x^2 + y^3)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(x \sin y + x^2 + y^3)(\sin y + 2x)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(x \sin y + x^2 + y^3)(x \cos y + 3y^2)$$

b) $f(x,y) = x^2 + x + \sin x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 1 + \cos x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Exercice 3.

$$f(x,y) = x^2 + x^3 + (x+1)\sin^2 y$$

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3x^2 + \sin^2 y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(x+1)\sin y \cos y = (x+1)\sin 2y$$

b)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + 6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2(x+1)\cos 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2\sin y \cos y = \sin 2y$$

c) On a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ donc $(0,0)$ est déjà un point critique. Attention, ceci est une condition nécessaire, mais pas suffisante d'extremum. Pour déterminer si on a un extremum, on regarde le trinôme en X:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)X^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)X + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$$

Ici on obtient $2X^2 + 2$ qui est toujours > 0. Comme on avait bien vérifié que $(0,0)$ était un point critique (attention, sans cela la conclusion serait fausse), il y a un minimum en $(0,0)$.