Université Paris-Sud
Math 255 (Calcul différentiel pour la physique)
Filière PCST, 2005/2006

Corrigé du devoir à la maison numéro 1

Algèbre linéaire

Exercice 1. : Vrai ou faux ?

a) C'est vrai. En effet pour avoir une application linéaire bijective entre $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^p$, il faut que $n = p$. Une façon de le voir est d'utiliser la formule $\dim\ker f + \dim\operatorname{Im} f = n$; si f est bijective, alors $\dim\ker f = 0$ et $+\dim\operatorname{Im} f = p$ d'où $n = p$.

b) C'est faux. Par exemple $(x, y) \mapsto (x, y^3)$ n'est pas linéaire, et elle est bijective vu que tout élément (x', y') de $\mathbf{R}^2$ s'écrit d'une manière unique (x, y^3) $(x = x'$ et $y' = ^3\sqrt{y}$.

c) C'est vrai, en effet $\det(AB) = \det A \det B$ donc si $\det(AB)$ est non nul, alors $\det A$ et $\det B$ sont tous les deux non nuls ce qui veut dire que A et B sont inversibles.

d) C'est vrai car $\det A^{2005} = (\det A)^{2005}$. Comme 2005 est impair et $\det A$ est un *réel*, $\det A = 1$ (attention ca ne serait pas vrai si on prenait une matrice à coefficients complexes).

e) C'est vrai, par exemple toutes les matrices triangulaires supérieures dont la diagonale est $(\lambda, 1)$, c'est-à-dire toutes les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où a est un réel arbitraire.

Exercice 2. : Changement de base

a) L'égalité $u = x'v_1 + y'v_2$ s'écrit $(x, y) = (ax' + cy', bx' + dy')$, soit $u = P.u'$ par définition du produit d'une matrice par un vecteur.

b) On a $f(u) = M.u = \alpha v_1 + \beta v_2$. Par définition de v_1 et v_2, cela donne $M.u = (\alpha a + \beta c, \alpha b + \beta d)$, soit encore $M.u = P.(\alpha, \beta)$ (toujours par définition du produit de la matrice P par le vecteur (α, β). En multipliant par P^{-1} des deux cotés, on obtient

$$(\alpha, \beta) = P^{-1}(M.u)$$

Maintenant d'après a) on a $u = Pu'$; il en résulte que $(\alpha, \beta) = P^{-1}(MP.u') = (P^{-1}MP)u'$.

c) On travaille dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$. Soit donc $u = x'v_1 + y'v_2$ un vecteur de $\mathbf{R}^2$ (on l'a décomposé dans la nouvelle base). Soit $f(u) = \alpha v_1 + \beta v_2$ son image (que l'on a aussi décomposée dans la nouvelle base). Par définition la matrice M' de f dans $\mathcal{B}'$ vérifie $(\alpha, \beta) = M'.(x', y')$ (les coordonnées de l'image s'obtiennent en faisant le produit de la matrice de f par les coordonnées du vecteur de départ, le tout exprimé dans la nouvelle base). Comme on a vu en

b) que $(\alpha, \beta) = (P^{-1}MP).(x', y')$, on obtient que M' est donnée par la formule $M' = (P^{-1}MP$.

d) D'après c), $\det M = \det(P^{-1}MP)$. Mais

$$\det(P^{-1}MP) = (\det P)^{-1}(\det M)(\det P) = \det M$$

Exercice 3. : Endomorphismes symétriques, antisymétriques

a) On voit immédiatement que la première est antisymétrique, la deuxième est symétrique, la troisième n'est ni symétrique ni antisymétrique (attention à la diagonale, pour ceux qui ont cru qu'elle était antisymétrique !).

b) Soit a_{ij} le terme qui est dans la i-ième ligne et la j-ième colonne d'une matrice A. Alors la j-ième colonne est l'image du j-ième vecteur e_j de la base canonique par l'application linéaire f associée à A, c'est-`-dire que

$$f(e_j) = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + a_{3j}e_3$$

Comme la base canonique (e_1, e_2, e_3) est orthonormée pour le produit scalaire canonique, il en résulte que le terme a_{ij} de A est donné par le produit scalaire de $f(e_j)$ par e_i :

$$a_{ij} = f(e_j).e_i$$

Maintenant $a_{ji} = f(e_j).e_i$ vaut aussi $e_j.f(e_i) = a_{ij}$ si f est symétrique. Ainsi A est égale à sa transposée donc A est symétrique. Si f est antisymétrique, on a $a_{ji} = f(e_j).e_i = -e_j.f(e_i) = -a_{ij}$ donc A est antisymétrique (cette question et la suivante sont les plus difficiles du devoir).

c) C'est en fait le même calcul que dans la question précédente. Si la matrice A de f est symétrique, alors $a_{ij} = a_{ji}$ donc $f(e_i).e_j = e_i.f(e_j)$ pour tous les indices (i, j). Mais par linéarité de f et du produit scalaire, on obtient que $f(u).v = u.f(v)$ pour tous vecteurs u, v de $\mathbf{R}^3$ (il suffit pour le voir de décomposer u et v dans la base canonique (e_1, e_2, e_3)). Ainsi f est symétrique. La preuve est la même pour antisymétrique en mettant des $-$ partout.

d) Une méthode consiste à calculer la matrice de cette application en utilisant l'expression du produit vectoriel avec les coordonnées, et à vérifier ensuite que cette matrice est antisymétrique. Voici une preuve sans prendre des coordonnées : soit f cette application linéaire, on a pour tous vecteurs u et w :

$$f(u).w = (v \wedge u).w = [v, u, w]$$

$$u.f(w) = u.(v \wedge w) = [v, w, u]$$

(le produit scalaire est symétrique). Mais le produit mixte est changé en son opposé si on échange deux vecteurs, donc $[v, u, w] = -[v, w, u]$, ce qui montre que f est antisymétrique.

e) Soit $M = (m_{ij})$. Alors M doit être l'opposée de la matrice transposée (m_{ji}). Ainsi $m_{ii} = -m_{ii}$ pour $i = 1, 2, 3$, ou encore les termes diagonaux m_{11}, m_{22}, m_{33} sont nuls. D'autre part le terme m_{12} doit être l'opposé du terme m_{21}, le terme m_{13} l'opposé de m_{31}, m_{23} l'opposé de m_{32}. En posant $a = m_{1,2}$, $b = m_{1,3}$, $c = m_{2,3}$, on obtient la forme voulue.

f) On trouve, avec la formule du cours

$$(-c, b, a) \wedge (x_1, x_2, x_3) = (bx_3 - ax_2, ax_1 + cx_3, -bx_1 - cx_2)$$

g) D'après e) la matrice M de f dans la base canonique s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

avec a, b, c réels (il suffit d'appeler a' le réel a trouvé en e) et de poser $a = -a'$). On a donc d'après l'expression du produit d'une matrice par un vecteur

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-ax_1 + bx_2, ax_1 + cx_3, -bx_1 - cx_2)$$

D'après f), on obtient $f(x_1, x_2, x_3) = (-c, b, a) \wedge (x_1, x_2, x_3)$, d'où le résultat en posant $v = (-c, b, a)$.