Université de Paris-Sud, année 2005/2006
Filière PCST-L2
Maths 255 (Harari-Alfonsi)

Corrigé de la feuille d'exercices de mathématiques numéro 6

1. a) D'après la formule de dérivation des fonctions composées, on a

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^2+1, \sin x).(2x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^2+1, \sin x). \cos x$$

b) Le raisonnement est le même qu'en a), en remarquant que pour calculer la dérivée partielle de h par rapport à x, on fait comme si y était une constante, et vice-versa. On obtient :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^2+y+1, \cos x+y^2).(2x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^2+y+1, \cos x+y^2).(-\sin x)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^2+y+1, \cos x+y^2) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^2+y+1, \cos x+y^2).(2y)$$

c) Il suffit de procéder comme en b), pour chacune des composantes de $u(x,y)$. Posons $u(x,y) = (u_1(x,y), u_2(x,y))$. Alors

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^2,y^2).(2x)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x^2,y^2).(2y)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}(x,y) = 2f(x.y)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial y}(x,y) = 2f(x.y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

et on obtient la matrice jacobienne

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^2,y^2).(2x) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^2,y^2).(2y) \\ 2f(x.y)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & 2f(x.y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

2. a) C'est un calcul qui a déjà été fait en cours. On trouve

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

b) Il suffit de calculer le déterminant de la matrice jacobienne, qui vaut $r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$. Ainsi la matrice jacobienne en (r, θ) est inversible si et seulement si r est non nul.

c) On obtient pour la matrice jacobienne

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{pmatrix}$$

On calcule son déterminant par exemple en développant par rapport à la première ligne, ce qui donne, en utilisant l'identité $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$:

$$\det(J_g(r,\theta,\varphi)) = \cos\theta(r^2\sin\theta\cos\theta) + r\sin\theta(r\sin^2\theta) = r^2\sin\theta$$

vu que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. Ainsi la matrice jacobienne est inversible si et seulement si: $r \neq 0$ et θ n'est pas un multiple entier de π.

3. a) On a $g(x,y) = f_1^2(x,y) + f_2^2(x,y)$. Ainsi

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2f_1(x,y)\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + 2f_2(x,y)\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2f_1(x,y)\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) + 2f_2(x,y)\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)$$

b) Si g est constante, ses deux dérivées partielles sont nulles. On obtient donc les identités

$$f_1(x,y)\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + f_2(x,y)\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 0$$

$$f_1(x,y)\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) + f_2(x,y)\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = 0$$

c) On applique les identités de b) en remplaçant (x,y) par (a,b). Considérant cela comme un système d'équations en les deux inconnues $f_1(a,b)$ et $f_2(a,b)$, on voit que le déterminant de ce système est précisément le déterminant de la matrice jacobienne en (a,b). L'hypothèse dit que ce déterminant est non nul. Ainsi la seule solution du système est la solution nulle, et on obtient $f_1(a,b) = f_2(a,b) = 0$, ou encore $f(a,b) = 0$.

4. a) On trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

b) Pour étudier les dérivées partielles de f en $(0,0)$, il faut revenir à la définition. On a $f(x,0) - f(0,0) = 0$ pour tout x donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. De même $f(0,y) - f(0,0) = 0$ pour tout y d'où $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

c) D'après ce qui précède, on a $\frac{g_1(x,0)-g_1(0,0)}{x} = 0$ pour tout x et $\frac{g_1(0,y)-g_1(0,0)}{y} = -1$ pour tout y. Ainsi $\frac{\partial g_1}{\partial x}(0,0) = 0$ et $\frac{\partial g_1}{\partial y}(0,0) = -1$

d) On trouve de même $\frac{\partial g_2}{\partial x}(0,0) = 1$ et $\frac{\partial g_2}{\partial y}(0,0) = 0$. Notons que cela signifie en particulier que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ est différent de $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$, autrement dit le théorème de Schwarz ne s'applique pas. La raison est que f admet bien des dérivées partielles d'ordre deux, mais celles-ci ne sont pas continues en $(0,0)$.