Corrigé de la feuille de TD numéro 4 (Math255, L2, filière PCST)

1. a) La racine carrée de x est définie si et seulement si $x \geq 0$. Ainsi l'ensemble de définition est l'ensemble des (x, y) avec $x \geq 0$.

Cette fonction n'est pas définie au voisinage de $(0,0)$ (alors qu'elle est définie en $(0,0)$). En effet montrons qu'on peut trouver des (x, y) aussi proches de $(0,0)$ qu'on veut tels que (x, y) ne soit pas dans l'ensemble de définition, autrement dit pour tout disque D de centre $(0,0)$ et de rayon $r > 0$, il existe (x, y) dans le disque D qui n'est pas dans l'ensemble de définition. il suffit de prendre $x = -r/2$ et $y = 0$. Alors la longeur du vecteur $(-r/2, 0)$ est $r/2$ qui est $< r$, ainsi ce vecteur est dans le disque D, alors qu'il n'est pas dans l'ensemble de définition vu que $-r/2 < 0$.

b) La tangente d'un nombre réel est définie si et seulement si ce nombre n'est pas de la forme $\pi/2 + k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$. La fonction est donc définie en (x, y) si et seulement si $x + y$ n'est pas de la forme $\pi/2 + k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$. Sur un dessin on voit que si x et y sont assez proches de 0, alors $x + y$ ne va pas être de cette forme. Démontrons-le : on remarque que dès que x et y ont une valeur absolue $< \pi/4$, alors la somme $x + y$ a une valeur absolue $< \pi/2$ (la valeur absolue de la somme est inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues). En particulier

$$-\pi/2 < x + y < \pi/2$$

or entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ il n'y a aucun nombre de la forme $\pi/2 + k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$. Ainsi si x et y sont suffisamment petits (plus précisément de valeur absolue $< \pi/4$), la fonction est définie en (x, y). Elle est donc définie au voisinage de $(0,0)$. Une autre formulation consite à dire que la fonction est définie en tout point du disque ouvert de centre $(0,0)$ et de rayon $\pi/4$ puisque si la longueur du vecteur (x, y) est $< \pi/4$, alors $\sqrt{x^2 + y^2} < \pi/4$, mais $\mid x \mid$ et $\mid y \mid$ sont majorés par $\sqrt{x^2 + y^2}$; ainsi $\mid\mid (x, y) \mid\mid < \pi/4$ implique $\mid x \mid < \pi/4$ et $\mid y \mid < \pi/4$.

c) Cette fonction est définie dès que le dénominateur ne s'annule pas, donc dès que $x^2 + y^2 - 1 \neq 0$. Les seuls points qui ne sont pas dans l'ensemble de définition sont donc ceux du cercle d'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$, cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1. La fonction est donc en particulier définie sur tout disque de centre $(0,0)$ et de rayon r plus petit (par exemple $r = 1/2$), elle est donc bien définie au voisinage de $(0,0)$.

2. a) C'est un peu une question-piège. L'expression de $f(x, y)$ quand $(x, y) \neq (0,0)$ a bien toujours un sens car le dénominateur $x^2 + y^2$ ne s'annule pas à moins que x et y ne soient tous les deux nuls. Comme d'autre part on a convenu de poser $f(0,0) = 0$, l'ensemble de définition est $\mathbf{R}^2$ tout entier.

b) Comme $f(0,0) = 0$, la seule limite a possible est $a = 0$. Plus généralement, quand une fonction est définie en un point, la seule limite possible est la valeur en ce point. On peut par contre dire par exemple que la limite quand x tend vers 1 de $\frac{x^2-1}{x-1}$ est 2, quand bien même $\frac{x^2-1}{x-1}$ n'est pas définie en 1 (remarquer que pour $x \neq 1$, on a $\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$).

c) Pour montrer cela, il suffit de trouver une famille (attention : une valeur particulière ne suffit pas) de points (x,y) tendant vers $(0,0)$ et tels que la famille des $f(x,y)$ correspondante ne tende pas vers 0. Or pour $x = y$, on a $f(x,y) = 1/2$. Si on fait tendre x vers zéro, on a donc $f(x,x) = 1/2$ alors que (x,x) tend vers $(0,0)$. Finalement, en utilisant b), f n'a pas du tout de limite en $(0,0)$.

3. Pour calculer la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, on procède ainsi : on bloque la deuxième variable égale à b, i.e. on considère la fonction $f(x,b)$, où b est maintenant considérée comme une constante; puis on cherche la dérivée par rapport à x au point $x = a$. De même pour l'autre dérivée $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$, en bloquant x égal à b. On obtient

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = b$; $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = a$.

b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \cos(\sin b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = a(-\sin(\sin b)).\cos b$$

c)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}}$$

Noter qu'on pourrait écrire (par exemple pour a)) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y$, mais il y a un petit risque de confusion entre le ∂x (qui est une notation pour dire qu'on dérive par rapport à la première variable) et le x de (x,y) (qui est le point où on regarde la dérivée partielle). D'autre part on est souvent amené à appliquer une différentielle $df(a,b)$ à un vecteur (x,y) (qui n'a rien à voir avec (a,b)). On fera donc bien attention à ne pas mélanger les notations. En particulier il faut éviter de noter df ou $\frac{\partial f}{\partial x}$ sans préciser le point où l'on prend cette différentielle ou dérivée partielle.

4.

a) Comme l'expression de f en $(0,0)$ est particulière, il ne faut pas ici dériver l'expression générale mais revenir à la définition. Or, les applications $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto (0,y)$ sont de manière évidente constantes nulles. En particulier leur dérivée en 0 est nulle. Ainsi les deux dérivées partielles considérées existent et sont nulles.

b) Là on peut utiliser l'expression générale pour calculer les dérivées partielles en un (a,b) autre que $(0,0)$. On trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{b(b^2-a^2)}{(a^2+b^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \frac{a(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}$$

c) S'il y avait une limite, ce serait 0 car on a calculé en a) $D(0,0) = 0$. Or ce n'est pas le cas vu que si on fait par exemple $a = 0$, on obtient $D(0,b) = 1/b$ qui ne tend pas vers 0 quand b tend vers zéro. On a bien trouvé une famille de (a,b) tendant vers $(0,0)$ alors que $f(a,b)$ ne tend pas vers 0.

5. a) C'est immédiat à partir de l'égalité $\mid ab \mid = \mid a \mid . \mid b \mid$ et de l'inégalité $\mid a+b \mid \leq \mid a \mid + \mid b \mid$, valables pour tous réels a et b.

b) Il est classique que $\frac{\sin y}{y}$ tend vers 1 quand y tend vers 0 et que $\cos y$ tend vers 1. Le résultat en découle.

c) D'après a), on a

$$\mid f(x,y) - (x+y) \mid \leq \mid x \mid .(1-\cos y) + \mid y \mid . \mid \frac{\sin y}{y} - 1 \mid$$

On remarque que $\mid x \mid$ et $\mid y \mid$ sont tous deux majorés par $\mid\mid (x,y) \mid\mid$. On en déduit que

$$\mid f(x,y) - (x+y) \mid \leq \mid\mid (x,y) \mid\mid .((1-\cos y) + \mid \frac{\sin y}{y} - 1 \mid)$$

Posons $\varepsilon(x,y) = (1-\cos y) + \mid \frac{\sin y}{y} - 1 \mid$. D'après b), cette fonction tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$ puisqu'en particulier y tend vers 0, d'où le résultat.