Université de Paris-Sud, année 2005/2006
Filière PCST-L2
Maths 255

Corrigé de la feuille de TD numéro 2

Déterminants

1. a) On calcule par exemple le premier déterminant en développant suivant la première ligne. On obtient qu'il vaut

$$1.(5.9-8.6)-2(4.9-7.6)+3.(4.8-7.5)$$

soit

$$-3-2.(-6)+3.(-3)=0$$

On pouvait aussi remarquer dès le début que si on appelle v_1, v_2, v_3 les vecteurs colonnes de cette matrice, on a l'égalité entre vecteurs de $\mathbf{R}^3$:

$$v_1+v_3=2v_2$$

ce qui montre que la famille (v_1,v_2,v_3) est liée, donc que la matrice n'est pas inversible; ainsi son déterminant est nul.

Pour le deuxième déterminant, on développe encore par rapport à la première ligne (noter que la présence de deux zéros sur cette ligne rend le calcul particulièrement simple). On obtient que ce déterminant vaut $1.(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=1$. Notons que géométriquement ceci est la matrice d'une rotation de l'espace, d'axe la droite dirigée par le premier vecteur de la base canonique, d'angle θ.

Le troisième déterminant est plus compliqué, si on en veut une forme agréable (qui permettra de répondre à la question b)). Pour simplifier le calcul, on va utiliser les propriétés du déterminant. D'abord, il ne change pas si on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres. Pour faire apparaître des zéros, on a intérêt à soustraire la première colonne à la deuxième et à la troisième. On obtient que le déterminant est le même que celui de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ x_1^2 & x_2^2-x_1^2 & x_3^2-x_1^2 \end{pmatrix}$$

On peut maintenant développer par rapport à la première ligne; ceci donne que le déterminant cherché est

$$(x_2-x_1)(x_3^2-x_1^2)-(x_2^2-x_1^2)(x_3-x_1)$$

soit

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 + x_1) - (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)(x_3 - x_1) =$$

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

La même méthode permettrait, en dimension n, de calculer par récurrence le déterminant dont la i-ième colonne est $(1, x_i, ..., x_i^{n-1})$, où $x_1, x_2, ..., x_n$ sont des réels. C'est le produit des $(x_i - x_j)$ pour $i > j$; par exemple pour $n = 4$ on obtient $(x_4 - x_3)(x_4 - x_2)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)$.

b) Un produit de réels est nul si et seulement si l'un de ces réels est nul. De ce fait, le déterminant ci-dessus est non nul si et seulement si les nombres x_1, x_2, x_3 sont deux à deux distincts, ou encore : la matrice considérée est inversible si et seulement si x_1, x_2, x_3 sont deux à deux distincts.

2. a) Dire que le déterminant de la matrice $(M - \lambda I)$ est nul, c'est dire que cette matrice n'est pas inversible, ou encore que l'application linéaire associée de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ n'est pas bijective. Une caractérisation de ce fait est que le **noyau** de cette application linéaire f n'est pas réduit à $\{0\}$, ou encore qu'il existe un vecteur **non nul** x de $\mathbf{R}^n$ tel que $f(x) = 0$. Or, $f(x)$ n'est autre que $(M - \lambda I).x$ (ici, $(M - \lambda I)$ est une matrice, que l'on multiplie par le vecteur x de $\mathbf{R}^n$, vu comme vecteur-colonne : on obtient un autre vecteur colonne de $\mathbf{R}^n$). D'après les règles de calcul sur les matrices, $(M - \lambda I).x = M.x - (\lambda I).x = M.x - \lambda x$ car la matrice λI correspond à l'application linéaire consistant à multiplier un vecteur par λ (comme son nom l'indique, la matrice identité correspond à l'application linéaire identité !). Finalement, de $(M - \lambda I).x = 0$, on tire $M.x = \lambda x$.

b) Oui ! Le raisonnement est exactement le même dans l'autre sens : s'il existe un vecteur x non nul tel que $M.x = \lambda x$, alors ce vecteur vérifie $(M - \lambda I).x = 0$, donc il est dans le noyau de l'application linéaire associée à $(M - \lambda I)$. Ainsi cette application linéaire n'est pas injective, ou encore le déterminant de $(M - \lambda I)$ est nul.

Remarque : On peut se demander si un tel λ existe toujours. En dimension 2 ce n'est pas toujours le cas : par exemple pour la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $M - \lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$ dont le déterminant est $\lambda^2 + 1$ qui ne s'annule pour aucun λ réel. Par contre en dimension 3, le développement du déterminant montre que le déterminant de $M - \lambda I$ est une fonction de λ de la forme $-\lambda^3 + ...$, les ... représentant des termes de degré ≤ 2 en λ. On remarque alors que cette fonction tend vers $+\infty$ en $-\infty$ et vers $-\infty$ en $+\infty$, elle doit donc s'annuler quelque part. Le même argument montre qu'en dimension **impaire**, un λ tel que $\det(M - \lambda I) = 0$ existe toujours.

3. a) Le résultat est assez clair intuitivement car le développement du déterminant fait intervenir des sommes et des produits, et l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs est stable pour ces opérations (en termes pompeux : c'est un **anneau commutatif**). Mais pour faire une vraie démonstration, on doit procéder avec un raisonnement **par récurrence** sur n.

Pour $n = 1$ le résultat est évident. On peut aussi le vérifier pour $n = 2$, le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ étant $ad - bc$. Supposons maintenant le résultat vrai pour n, c'est-à dire que "toute matrice (n, n) à coefficients dans $\mathbf{Z}$ a son déterminant dans $\mathbf{Z}$", et montrons le même résultat pour $n+1$. Soit donc A une matrice $(n+1, n+1)$ à coefficients dans $\mathbf{Z}$, écrivons-la

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La formule du déterminant dit alors que $\det A$ s'écrit $\det A = a_{11}c_{11} + ... + a_{1n}c_{1n}$, où c_{ij} (pour tous indices i, j) désigne comme d'habitude le cofacteur associé à a_{ij}. Ce cofacteur vaut par définition $(-1)^{i+j} \det M_{ij}$, où M_{ij} est la matrice obtenue à partir de M en enlevant la i-ième ligne et la j-ième colonne. Comme toutes les matrices M_{ij} sont des matrices (n, n), on peut appliquer l'hypothèse de récurrence (c'est-à-dire le fait que l'on ait supposé le résultat vrai pour n) pour en déduire que chaque $\det M_{ij}$ est dans $\mathbf{Z}$, ce qui implique que chaque c_{ij} est aussi dans $\mathbf{Z}$. Ainsi, $\det A$ qui est la somme $a_{11}c_{11} + ... + a_{1n}c_{1n}$ est également dans $\mathbf{Z}$, ce qui achève la preuve par récurrence.

b) Par définition, la matrice M^{-1} vérifie $M.M^{-1} = I$. En prenant le déterminant des deux membres, on obtient $\det(M.M^{-1}) = 1$ car le déterminant de l'identité est 1. Comme le déterminant d'un produit est le produit des déterminants, cela donne que $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det M}$. Mais d'après la question a), le déterminant des matrices M et M^{-1} (qui sont supposées à coefficient dans $\mathbf{Z}$) est aussi dans $\mathbf{Z}$. Or, les seuls éléments de $\mathbf{Z}$ dont l'inverse est dans $\mathbf{Z}$ sont 1 et -1, ce qui termine l'exercice.

4. a) On sait que le déterminant est changé en son opposé quand on permute deux vecteurs. Ainsi le déterminant de (v_2, v_1, v_3) dans la base $\mathcal{B}$ est $-d$, celui de (v_2, v_3, v_1) est d car il est l'opposé de celui de (v_2, v_1, v_3).

b) Rappelons d'abord qu'un ensemble à n éléments possède $n!$ permutations, pour $n = 3$ il y en a donc 6. L'idée consiste à écrire chaque permutation comme la composée d'un certain nombre de *transpositions* (une transposition est une application consistant simplement à échanger deux indices). Si ce nombre est pair (on dit alors que la permutation est de *signature* 1), le déterminant ne change pas, s'il est impair (on dit alors que la permutation est de *signature* -1), le déterminant est changé en son opposé.

Pour la permutation identité (v_1, v_2, v_3), le déterminant est d. Pour (v_2, v_1, v_3) il est $-d$. Pour (v_2, v_3, v_1) il est d. Pour (v_1, v_3, v_2) il est $-d$ (on a échangé v_2 et v_3), pour (v_3, v_2, v_1) il est $-d$ (on a échangé v_1 et v_3), enfin pour (v_3, v_1, v_2) il est d (on a échangé v_1 et v_3, puis v_2 et v_3).