Université Paris-Sud
Math 255, filière PCST (Harari/Alfonsi)
2005/2006

Corrigé de la feuille d'exercices numéro 1

1. a) Comme f est une application linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$, il suffit de vérifier qu'elle est injective, ou encore que son noyau est réduit au vecteur nul. Or, un vecteur (x, y) du noyau vérifie $2x + y = 0$ et $x - y = 0$, soit $x = y$ et $3x = 0$, soit finalement $x = y = 0$.

b) D'après le cours la matrice de f dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Pour vérifier que (v_1, v_2) est une base de $\mathbf{R}^2$, il suffit de vérifier par exemple que la famille (v_1, v_2) est libre car elle comporte deux vecteurs. Or, si x et y sont des réels tels que $xv_1 + yv_2 = 0$, alors on obtient $x + y = 0$ et $-x + y = 0$, soit $x = y = 0$ (en additionnant, puis en soustrayant les deux égalités). Une autre méthode consiste à utiliser le fait que la famille (v_1, v_2) est libre si et seulement si la matrice M constituée des vecteurs colonnes v_1 et v_2 est inversible, ou encore si et seulement si $\det M \neq 0$. Or $\det M$ vaut $1.1 - (-1).1 = 2$.

Pour écrire la matrice de f dans la nouvelle base (v_1, v_2), la méthode consiste à écrire $f(v_1)$ et $f(v_2)$, puis à les exprimer **dans la nouvelle base** (v_1, v_2) (attention : on change de base au départ et à l'arrivée). On calcule $f(v_1) = (1, 2)$ et $f(v_2) = (3, 0)$. Il faut ensuite écrire un vecteur (a, b) quelconque de $\mathbf{R}^2$ dans la nouvelle base, c'est-à-dire écrire $(a, b) = x.(1, -1) + y(1, 1)$ (on appliquera ensuite cela aux vecteurs $f(v_1)$ et $f(v_2)$). On obtient $a = x + y$ et $b = -x + y$, donc $y = 1/2(a + b)$ et $x = 1/2(a - b)$. Ainsi $f(v_1) = (1, 2) = -1/2.v_1 + 3/2.v_2$, et $f(v_2) = (3, 0) = 3/2.v_1 + 3/2.v_2$. La matrice de f dans la base (v_1, v_2) est donc

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

2. a) La méthode est la même que pour l'exercice précédent. Il suffit de montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) est libre, or si $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$, on obtient $x = 0, -y = 0, y + z = 0$ d'où $x = y = z = 0$.

b) Par définition, M s'obtient en mettant en colonne les coordonnées de v_1, v_2, v_3 dans la base canonique. C'est donc

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour avoir la matrice de passage dans l'autre sens (qui est d'ailleurs l'**inverse** de la matrice M), on doit exprimer les vecteurs de la base canonique en fonction des vecteurs (v_1, v_2, v_3) : par exemple le premier vecteur colonne de la matrice cherchée sera (x, y, z) si le premier vecteur $e_1 = (1, 0, 0)$ de la base canonique s'écrit $xv_1 + yv_2 + zv_3$. Comme $e_1 = v_1$, on obtient que la première colonne cherchée est $(1, 0, 0)$. De même, pour obtenir la deuxième colonne, on écrit $(0, 1, 0) = x'v_1 + y'v_2 + z'v_3$, ce qui donne (en résolvant un système linéaire très simple) $x' = 0, y' = -1, z' = 0$ et ainsi la deuxième colonne est $(0, -1, 0)$. Enfin si on écrit $(0, 0, 1) = x''v_1 + y''v_2 + z''v_3$, on obtient $x'' = 0, y'' = 1, z'' = 1$ d'où la troisième colonne $(0, 1, 1)$. Finalement la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le fait que cette matrice de passage "en sens inverse" soit la même que celle de départ M est fortuit : en général on trouve l'inverse M^{-1}, mais ici M est son propre inverse (on peut vérifier directement que $M.M$ est la matrice identité I).

c) Plus généralement, l'emsemble E des vecteurs x tels que $M.x = \lambda.x$ (où M est une matrice et λ un réel fixé) est toujours un sous-espace vectoriel. En effet $M.0 = 0$; si x et y sont dans E, alors $M.(x + y) = M.x + M.y$ d'après les règles de calcul, mais $M.x + M.y = \lambda.x + \lambda.y = \lambda(x + y)$ donc $x + y$ est dans E; enfin si $x \in E$ et $\alpha \in \mathbf{R}$, alors $M.(\alpha x) = \alpha(M.x) = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x)$ donc $\alpha.x \in E$.

Pour trouver la dimension de V, on cherche l'ensemble des vecteurs $x = (x_1, x_2, x_3)$ qui sont dans V. Ce sont ceux qui vérifient le système : $x_1 = -x_1, -x_2 + x_3 = -x_2, x_3 = -x_3$, soit $x_1 = x_3 = 0$ et x_2 quelconque. V est donc la droite dirigée par exemple par le vecteur $(0, 1, 0)$, c'est un sous-espace de dimension 1.

De même W est l'ensemble des y_1, y_2, y_3 qui vérifient $y_1 = y_1, -y_2 + y_3 = y_2, y_3 = y_3$, donc y_1 et y_3 quelconques et $y_2 = y_3/2$. Intuitivement, W est de dimension 2 puisqu'il n'y a qu'une "contrainte". Pour le démontrer rigoureusement, on observe que W est le noyau de l'application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$ qui à (y_1, y_2, y_3) associe $y_2 - y_3/2$. L'image de cette application est de dimension 1 (elle ne peut pas être de dimension 0 car il y a des réels non nuls dans l'image, par exemple 1 qui est l'image de $(0, 1, 0)$). D'après la formule de la dimension, le noyau est de dimension $3 - 1 = 2$. C'est presque toujours avec cette méthode qu'on calcule des dimensions quand on voit intuitivement le résultat.

3. a) La méthode étant exactement la même que pour l'exercice **1.**, on ne la détaille pas. On trouve

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Faire un produit de matrices diagonales est particulièrement simple : il suffit de multiplier terme ̀terme les éléments diagonaux. On obtient $N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $N^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

c) On obtient de même $N^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^m \end{pmatrix}$

d) La matrice de f dans la base (v_1, v_2) étant N, la matrice de f^m dans cette même base est N^m, que l'on a calculée en c). Pour avoir la matrice de f^m dans la base canonique (e_1, e_2), on utilise l'expression de f^m dans la base (v_1, v_2); d'après c), on a $f^m(v_1) = v_1$ et $f^m(v_2) = 2^m v_2$. Comme $v_1 = e_1$, on a déjà $f^m(e_1) = e_1$. Il nous faut maintenant exprimer $f^m(e_2)$ **en fonction de** e_1 **et** e_2. Or $e_2 = v_2 - 2v_1$ donc $f^m(e_2) = f^m(v_2) - 2f^m(v_1) = 2^m v_2 - 2e_1 = 2^m(2e_1 + e_2) - 2e_1$ soit finalement $f^m(e_2) = (2^{m+1} - 2)e_1 + 2^m e_2$. Ainsi la matrice de f^m dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2^{m+1} - 2 \\ 0 & 2^m \end{pmatrix}$$

Notons que cette matrice n'est autre que M^m puisque M était la matrice de f dans la base canonique. On a ainsi trouvé un moyen de calculer les puissances de M (qui était a priori compliquée) : on a trouvé une base où l'application linéaire associée avait une matrice diagonale pour faire le calcul d'élévation à la puissance m, puis on est repassé dans la base canonique. On dit qu'on a effectué une "diagonalisation" de l'endomorphisme f.

4. a) Le noyau de f correspond aux vecteurs (x_1, x_2, x_3) tels que $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Il est donc de dimension 2 (même méthode que dans l'exercice **2.** c)).

b) C'est exactement la même chose que dans la solution de **2.** c).

c) Soit $x = (x_1, x_2, x_3)$ un vecteur de $\mathbf{R}^3$ tel que $f(x) = \lambda x$. Ceci s'écrit $x_1 + x_2 + x_3 = \lambda x_1 = \lambda x_2 = \lambda x_3$. Si λ n'est pas nul, cela donne $x_1 = x_2 = x_3$ et $\lambda x_1 = 3x_1$ donc si λ n'est pas non plus égal à 3, on a $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

d) Pour $\lambda = 3$, le système précédent s'écrit juste $x_1 = x_2 = x_3$ donc l'espace cherché est la droite dirigée par le vecteur $(1, 1, 1)$; c'est un sous-espace de dimension 1.