Université de Paris-Sud, année 2005/2006
Filière PCST-L2
Maths 255 (D. Harari)

corrigé du partiel du 25 octobre 2005

Exercice 1.

a) La matrice identité est la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc la matrice $A - \lambda I$ est

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix}$$

b) Ce déterminant est

$$(a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - b^2)$$

c) Pour montrer que l'équation $D(\lambda) = 0$ possède au moins une solution réelle, il suffit de montrer que le discriminant de cette équation du second degré est positif ou nul. Or ce discriminant vaut

$$(a+c)^2 - 4(ac - b^2) = a^2 + c^2 + 2ac - 4ac + b^2 = (a-c)^2 + b^2$$

Il est donc positif ou nul comme somme de deux carrés.

d) Comme $D(\lambda) = 0$, la matrice $(A - \lambda I)$ n'est pas inversible, ou encore le noyau de l'application linéaire associée n'est pas nul. Cela signifie précisément qu'il existe un vecteur x non nul tel que $(A - \lambda I).x = 0$, ou encore tel que $A.x = \lambda x$.

e) Dire que B est égale à sa matrice transposée, c'est dire qu'on peut la mettre sous la forme

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

où a et b sont des réels. D'après les questions c) et d), il existe un réel λ et un vecteur non nul y de $\mathbf{R}^2$ tels que $B.y = \lambda y$ (B joue le rôle de A défini au début de l'exercice, et y le rôle du x qu'on a trouvé en d)). Ainsi $B.y$ est colinéaire à y.

Exercice 2.

a) Si $u = 0$, on a $f_u(x) = 0$ pour tout x donc le noyau de f_u est $\mathbf{R}^3$ tout entier, qui est de dimension 3. Si u n'est pas nul, on sait que $u \wedge x = 0$ si et seulement si x est colinéaire à u. Ainsi le noyau de f_u est l'ensemble des $\lambda.u$ avec λ réel : c'est la droite de vecteur directeur u, qui est de dimension 1.

b) On calcule $f_u(x_1, x_2, x_3) = (a, b, c) \wedge (x_1, x_2, x_3)$ soit

$$f_u(x_1, x_2, x_3) = (bx_3 - cx_2, cx_1 - ax_3, ax_2 - bx_1$$

La matrice cherchée est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

Si on calcule le déterminant de cette matrice, on trouve 0. On peut aussi remarquer que comme le noyau de f_u n'est jamais réduit à $\{0\}$ d'après a), cette matrice ne peut pas être inversible ce qui montre (sans calculs) que son déterminant est nul.

c) On sait que $\det({}^tM) = \det M$. Ainsi $\det(-{}^tM) = (-1)^3 \det M = -\det M$. Finalement $\det M = -\det M$, ce qui montre que $\det M = 0$.

d) Si on remplace 3 par un enitier n, on obtient $(-1)^n$ au lieu de $(-1)^3$, or $(-1)^n$ fait encore -1 si n est impair. Le résultat reste donc vrai pour tout n impair, mais par exemple ca ne marche pas pour $n = 2$: la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

est bien égale à l'opposée de sa transposée, pourtant son déterminant est 1.

Exercice 3.

a) Il n'y a pas de limite. En effet si on fait $x = 0$, on trouve toujours zéro donc la seule limite possible serait 0. Mais si on fait $x = y$, on trouve $1/y$, qui ne tend pas vers zéro quand y tend vers zéro.

b) La limite est 0. En effet comme $0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2$, on a

$$\mid \frac{x^3}{x^2 + y^2} \mid \leq \mid x \mid$$

De même

$$\mid \frac{y^3}{x^2 + y^2} \mid \leq \mid y \mid$$

Finalement la valeur absolue de $f(x,y)$ est plus petite que $\mid x \mid + \mid y \mid$, qui tend vers 0 quand x et y tendent vers 0. A fortiori, $f(x,y)$ tend aussi vers 0.

c) On fait un développement limité de $\cos x$ et $\cos y$. On obtient

$$f(x,y) = \frac{-x^2/2 - x^3\varepsilon_1(x) - y^2/2 - y^3\varepsilon_2(y)}{x^2+y^2}$$

soit

$$f(x,y) = -1/2 - \frac{x^3\varepsilon_1(x) + y^3\varepsilon_2(y)}{x^2+y^2}$$

où $\varepsilon_1(x)$ et $\varepsilon_2(y)$ tendent vers 0 quand x et y tendent vers zéro. En particulier, pour x et y assez proches de 0, $\varepsilon_1(x)$ et $\varepsilon_2(y)$ ont une valeur abolue ≤ 1, et la valeur absolue du second terme est plus petite que celle de

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

qui tend vers 0 d'après b). Finalement ce second terme tend vers 0 et la limite est $-1/2$.

Exercice 4.

a) La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ s'obtient en dérivant par rapport à x, y étant considéré comme une constante

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x(x^2+y^2) - x^2(2x)}{x^2+y^2} = \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

De même

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

b) On ne peut pas utiliser les formules précédentes (qui ne valent que quand le dénominateur ne s'annule pas). On procède donc directement : $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ est la dérivée en $x=0$ de l'application $x \mapsto f(x,0)$ soit $x \mapsto 1$ qui est constante. Cette dérivée est donc nulle. De même l'application $y \mapsto f(0,y)$ est constante nulle, donc sa dérivée en $y=0$ est nulle. Finalement les deux dérivées partielles cherchées sont nulles.

c) On a donc

$$g(x,y) = (f(x,y), \frac{x^2}{x^2+1})$$

On a déjà les deux dérivées partielles en (x, y) de $f(x, y)$ (on les a calculées en a) et b)). D'autre part la dérivée partielle par rapport à x de $\frac{x^2}{x^2+1}$ est

$$\frac{2x(x^2+1) - x^2(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

tandis que la dérivée partielle de $\frac{x^2}{x^2+1}$ par rapport à y est nulle (cette expression ne dépendant pas de y). Finalement la matrice jacobienne de g en (x, y) est

$$\begin{pmatrix} \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2} & -\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{2x}{(x^2+1)^2} & 0 \end{pmatrix}$$

si $(x, y) \neq (0, 0)$ et la matrice jacobienne de g en $(0, 0)$ est la matrice nulle.