Université de Paris-Sud, année 2005/2006
Filière PCST-L2
Maths 255 (Harari-Alfonsi)

Corrigé de la feuille d'exercices de mathématiques numéro 6bis

Dérivées partielles, différentielles (compléments)

1. a) L'astuce est toujours la même quand on veut passer d'un résultat sur le maximum à un résultat sur le minimum (et vice-versa) : on considère la fonction $g(x) = -f(x)$. D'après le résultat admis, la fonction g (qui est continue) admet un maximum absolu sur $B_f(a,r)$. Or dire que g est maximum en un point revient à dire que f est minimum en ce point, d'où le résultat.

b) Non, pas forcément. Par exemple la fonction $f(x,y) = x + y$ a pour différentielle (en tout point) l'application linéaire $(h_1, h_2) \mapsto h_1 + h_2$ vu que les deux dérivées partielles valent 1.

c) D'après ce qu'on a vu, g admet un maximum absolu et aussi un minimum absolu sur la boule fermée $B_f(0,r)$. Si g est une application constante, alors on peut prendre n'importe quel u_0. Sinon comme g a la même valeur (C) sur tout le bord de la boule, soit le minimum soit le maximum est atteint à l'intérieur de la boule, i.e. en un point u_0 de la boule ouverte $B(0,r)$. Ce u_0 convient alors (on est dans le cas i) si c'est un maximum, dans le cas ii) si c'est un minimum).

d) Comme u_0 est à l'intérieur de la boule, cela signifie en particulier que f a un extremum local en u_0. D'après le cours, ceci implique que $df(u_0) = 0$. On notera bien la différence avec ce qui se passait en b) : un extremum sur une boule fermée n'est pas forcément un extremum local parce que cet extremum pourrait n'être atteint que sur le bord de la boule.

2. On commence par chercher les points critiques. Pour $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^3$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 3x^2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$. On obtient que les points crtiques sont $(0,0)$ et $(-2/3, 0)$. On passe ensuite aux différentielles partielles secondes : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 + 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$. Le trinôme en X à considérer en chaque point critique (x,y) est donc

$$(2 + 6x)X^2 + 2$$

En $(x,y) = (0,0)$, il vaut $2X^2 + 2$, donc il est > 0. En $(x,y) = (-2/3, 0)$, il vaut $-2X^2 + 2$ qui n'est pas de signe constant. Ainsi il y a un minimum local en $(0,0)$, et pas d'extremum local en $(-2/3,0)$. On peut voir que $(0,0)$ n'est pas un minimum absolu en prenant par exemple $x=-10$ et $y=0$, alors $f(-10,0)=-900<f(0,0)=0$.

Pour $f(x,y)=x^3+2xy+y^2$, on trouve $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2+2y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2x+2y$. On obtient comme points critiques $(0,0)$ et $(1,-1)$. Ensuite $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=2$. On est ramené au trinôme en X

$$6xX^2+4X+2$$

Pour $(x,y)=(0,0)$, il vaut $4X+2$ qui n'est pas de signe constant. Pour $(x,y)=(1,-1)$, il vaut $6X^2+4X+2$ qui est toujours >0 (le discriminant vaut -32). On n'a donc pas d'extremum local en $(0,0)$, mais un minimum local en $(1,-1)$. Ce minimum local vaut 0, ce n'est pas un minimum global car par exemple $f(-10,0)=-1000$.