Université de Paris-Sud, année 2005/2006
Filière PCST-L2
Maths 255 (Harari-Alfonsi)

Corrigé de la feuille d'exercices de mathématiques numéro 10

Différentielles extérieures, formule de Green-Riemann

1. a) $\alpha = xy^2z\,dx + xyz\,dy + x^2y^2z^2\,dz$

On applique les règles habituelles : si f est une fonction et α est une forme différentielle de degré 1, alors $d(f.\alpha) = df.\alpha + f.d\alpha$. En particulier pour $\alpha = dx$ $\alpha = dy$ ou $\alpha = dz$, $d\alpha = 0$ puisque dd appliqué à n'importe quelle forme fait 0. On obtient ici

$$d\alpha = d(xy^2z)dx + d(xyz)dy + d(x^2y^2z^2)dz$$

Ensuite si $f(x, y, z)$ est une fonction, on a par définition

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)dz$$

soit ici

$$d\alpha = (y^2zdx+2xyzdy+xy^2dz)dx+(yzdx+xzdy+xydz)dy+(2xy^2z^2dx+2x^2yz^2dy+2x^2y^2zdz)dz$$

ou encore

$$d\alpha = (yz - 2xyz)dxdy + (2x^2yz^2 - xy)dydz + (xy^2 - 2xy^2z^2)dzdx$$

vu les égalités $dxdy = -dydx$, $dxdx = 0$ et leurs analogues.

b) $\alpha = \sin x \cos y\,dx + \sin z\,dy + \cos x \cos y \cos z\,dz$

La méthode étant exactement la même, on ne détaillera pas les calculs. On trouve

$$d\alpha = (\sin x \sin y)dxdy+(-\cos z-\cos x \sin y \cos z)dydz+(\sin x \cos y \cos z)dzdx$$

2. a) α est définie aux points (x, y, z) tels que ni x, ni y, ni z ne soient nuls. Ainsi U est $\mathbf{R}^3$ privé des axes de coordonnées. U n'est pas convexe car par exemple $(1, 1, 1)$ et $(-1, -1, -1)$ sont dans U mais pas leur milieu $(0, 0, 0)$ (qui est pourtant sur le segment qu'ils forment).

b) C'est un calcul comme dans l'exercice **1**. On trouve

$$d\alpha = (\frac{1}{y^2z} - \frac{1}{x^2z})dxdy + (\frac{1}{z^2x} - \frac{1}{y^2x})dydz + (\frac{1}{x^2y} - \frac{1}{z^2y})dzdx$$

c) (Question difficile) Dire que $f\alpha$ est fermée, c'est dire que $d(f\alpha) = 0$. Or $d(f\alpha) = df.\alpha + f.d\alpha$. Comme par définition on a

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)dz$$

on obtient via b) :

$$(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz)(\frac{dx}{yz} + \frac{dy}{zx} + \frac{dz}{xy}) =$$

$$-f.((\frac{1}{y^2z} - \frac{1}{x^2z})dxdy + (\frac{1}{z^2x} - \frac{1}{y^2x})dydz + (\frac{1}{x^2y} - \frac{1}{z^2y})dzdx$$

(on a abrégé $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$ en $\frac{\partial f}{\partial x}$ etc.). En effectuant tout avec les règles de calcul habituelles, on obtient, en identifiant les termes en $dxdy$, $dydz$, et $dzdx$:

$$\frac{1}{zx}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{yz}\frac{\partial f}{\partial y} = -f.((\frac{1}{y^2z} - \frac{1}{x^2z})$$

et les deux autres égalités obtenues par permutation circulaire de x, y, z. On est amené à chercher une expression de f symétrique en x, y, z. Après quelques tatônnements, on voit que $f(x,y,z) = xyz$ convient.

3.

$$\alpha = \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{(x^2+y^2)^h}$$

a) Posons $\alpha = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Dire que α est fermée signifie que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Le calcul donne

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{(2h-1)y^2 - 2hxy - x^2}{(x^2+y^2)^{h+1}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - 2hxy + (1-2h)x^2}{(x^2+y^2)^{h+1}}$$

Ainsi α est fermée si et seulement si $h = 1$.

b) (Question difficile). Si α est exacte, elle est fermée donc nécessairement $h = 1$ et dans ce cas α est la forme définie sur $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ par

$$\alpha = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} + \frac{xdx}{x^2+y^2} + \frac{ydy}{x^2+y^2}$$

Soit α_1 la forme $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ et α_2 la forme $\frac{xdx}{x^2+y^2}+\frac{ydy}{x^2+y^2}$, on a donc $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$. On observe que α_2 est exacte car $\alpha_2=df$ avec $f(x,y)=1/2\ln(x^2+y^2)$. Or il est clair qu'une somme ou une différence de formes exactes est exacte vu la règle de calcul $d(\alpha f+\beta g)=\alpha df+\beta dg$ (valable pour tous réels α, β). Si α était exacte, alors $\alpha_1=\alpha-\alpha_2$ serait aussi exacte mais on a vu en cours que ce n'etait pas le cas (c'est le contre-exemple classique de forme fermée non exacte sur $\mathbf{R}^2-\{(0,0)\}$). Finalement, le bilan est que la forme α n'est jamais exacte.

4. a) On veut appliquer la formule de Green-Riemann. Pour cela, on paramètre l'ellipse de centre 0 et dont les axes ont pour longueur $2a$ et $2b$ par $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, t variant de 0 à 2π. L'aire qu'on veut calculer est celle du domaine délimitée par la courbe paramétrée c définie ci-dessus. D'après la formule de Green-Riemann, c'est l'intégrale sur c de la forme différentielle $\alpha=1/2(xdy-ydx)$, vu que la différentielle extérieure de α est $dxdy$ (on pourrait aussi utiliser la forme xdy ou encore $-ydx$, mais le calcul est plus symétrique avec α définie comme ci-dessus). ainsi l'aire est

$$\int_c 1/2(xdy-ydx)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos t.b\cos t-b\sin t.(-a\sin t))dt=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}ab=\pi ab$$

b) Comme $c(-\pi)=c(\pi)$, la courbe c est fermée par définition. Supposons que $c(t_1)=c(t_2)$ pour deux valeurs distinctes t_1 et t_2. Alors on a $t_1^2=t_2^2$, donc $t_1=-t^2$, et aussi $\sin t_1=\sin t_2$. On en tire $\sin(t_1)=-\sin(t_1)$ d'où $\sin t_1=0$ et t_1 vaut π ou $-\pi$, t_2 étant son opposé. Ainsi c est simple.

On calcule l'aire $\mathcal{A}$ du domaine qu'elle délimite avec la formule de Green-Riemann. Cette aire vaut

$$\int_c xdy=\int_{-\pi}^{\pi}\sin t.2tdt$$

qu'on calcule avec une intégration par parties. On obtient

$$\mathcal{A}=[-2t\cos t]_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}2\cos tdt=4\pi$$

5. Comme α est fermée et est définie sur $\mathbf{R}^2$ tout entier, elle est exacte, i.e. on peut l'ecrire $\alpha=df$ où f est une fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$. Autrement dit le champ w associé à α peut s'écrire $w=\mathrm{Grad}\,f$. Alors pour toute courbe c partant de a et arrivant en b, l'intégrale de α sur c est la circulation de w sur c, c'est-à-dire, d'après un calcul fait plusieurs fois

$$f(c(b))-f(c(a))$$

qui ne dépend que du point de départ et du point d'arrivée de la courbe c. En particulier on obtient la même chose pour les deux courbes c_1 et c_2 de l'énoncé; c'est ce qu'on voulait montrer.