Examen, M2

D. Harari

15 mai 2023; 3h; notes de cours autorisées

Dans chaque exercice, on peut admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure.

Sauf mention explicite du contraire, les groupes de cohomologie considérés sont relatifs à la cohomologie étale.

Exercice 1 (6 points)

Parmi les assertions suivantes, démontrer celles qui sont vraies et donner un contre-exemple pour celles qui sont fausses (dire d'abord si l'assertion est vraie ou fausse).

a) Soit k un corps parfait de caractéristique $p > 0$. Alors le faisceau μ_p est trivial sur $\operatorname{Spec} k$ pour la topologie plate.

b) Soit X une variété lisse sur $\mathbf{R}$. Soit $n > 0$. Alors les groupes $H^i(X, \mu_n)$ sont finis pour tout $i \geq 0$.

c) Soit X la $\mathbf{C}$-variété projective définie par l'équation

$$a_0 x_0^2 + ... + a_n x_n^2 = 0$$

dans $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$, où $a_0, ..., a_n$ sont des nombres complexes non nuls et $n \geq 3$. Alors $\operatorname{Br} X = 0$.

d) Soit X un schéma intègre, noethérien et régulier de corps des fonctions K. Soit G un schéma en groupes commutatif sur X et $G_K := G \times_X \operatorname{Spec} K$. Alors l'application canonique $H^1(X, G) \to H^1(K, G_K)$ est injective.

Exercice 2 (5 points)

Soit X un schéma. Soit Z un sous-schéma fermé de X, on pose $U = X - Z$. Soit $i : Z \to X$ l'immersion fermée correspondante et $j : U \to X$ l'immersion ouverte.

1. a) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur $U_{\text{ét}}$. Montrer qu'on a un isomorphisme $j^* j_* \mathcal{F} \simeq \mathcal{F}$.

b) En déduire qu'on a une suite exacte de faisceaux sur $X_{\text{ét}}$:

$$0 \to j_! \mathcal{F} \to j_* \mathcal{F} \xrightarrow{u} i_* i^* j_* \mathcal{F} \to 0. \tag{1}$$

2. On suppose de plus que $i^* j_* : S(U) \to S(Z)$ a un adjoint à gauche exact et que la flèche $H^0(X, j_* \mathcal{F}) \to H^0(X, i_* i^* j_* \mathcal{F})$ induite par u est un isomorphisme.

a) Montrer que $H^0(X, j_! \mathcal{F}) = 0$.

b) On suppose que $\mathcal{F}$ est un injectif de la catégorie des faisceaux sur $U_{\text{ét}}$. Montrer que $H^r(X, j_! \mathcal{F}) = 0$ pour tout $r \geq 0$.

Exercice 3 (6 points)

Soit k un corps de clôture séparable $\bar{k}$. Soit X une varieté géométriquement intègre sur k. Soit $\overline{X} = X \times_k \bar{k}$ et $\bar{k}[X]^* = H^0(\overline{X}, \mathbf{G}_m)$. On pose $\operatorname{Br}_1 X := \ker[\operatorname{Br} X \to \operatorname{Br} \overline{X}]$ et $U(X) = \bar{k}[X]^*/\bar{k}^*$.

1. Montrer qu'on a une suite exacte

$$0 \to H^1(k, \bar{k}[X]^*) \to \operatorname{Pic} X \to H^0(k, \operatorname{Pic} \overline{X}) \to H^2(k, \bar{k}[X]^*) \to \operatorname{Br}_1 X \to H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{X}).$$

Dans toute la suite, on suppose que l'ensemble $X(k)$ des k-points de X est non vide.

2. a) Montrer que l'inclusion $\bar{k}^* \hookrightarrow \bar{k}[X]^*$ induit une application injective $\operatorname{Br} k \to H^2(k, \bar{k}[X]^*)$.

b) En déduire un isomorphisme $H^1(k, \bar{k}[X]^*) \simeq H^1(k, U(X))$.

3. On suppose de plus que $\operatorname{Pic} \overline{X} = 0$. Montrer que $\operatorname{Br}_1 X / \operatorname{Br} k$ est isomorphe à $H^2(k, U(X))$.

Exercice 4 (4 points)

Soit $Y = \operatorname{Spec} A$, où A est un anneau de valuation discrète de corps des fractions K. Soit $j : \eta = \operatorname{Spec} K \to Y$ l'inclusion du point générique. Soit G un schéma en groupes propre et commutatif sur Y, on pose $G_K = G \times_A K = G \times_Y \operatorname{Spec} K$.

a) Montrer qu'on a un isomorphisme $G \simeq j_* G_K$ de faisceaux étales sur Y.

b) En déduire que l'application canonique $i : H^1(Y, G) \to H^1(K, G_K)$ est injective.

c) Soit B un schéma en groupes propre et lisse (pas forcément commutatif) sur Y. Montrer que la flèche $H^1(Y, B) \to H^1(K, B_K)$ a encore un noyau trivial.