Examen, M2

D. Harari

9 mai 2022; 3h

Tout énoncé figurant dans les notes de cours peut être utilisé sans démonstration. Dans chaque exercice, on peut admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure.

Sauf mention expresse du contraire, tous les groupes de cohomologie sont relatifs à la topologie étale. On pourra utiliser sans démonstration les résultats suivants : soient A un anneau normal de corps des fractions K et Z un A-schéma fini, alors la flèche canonique $Z(A) \to Z(K)$ est un isomorphisme; si R est un anneau local, alors $\operatorname{Pic} R = 0$.

Exercice 1 : Vrai ou faux ? (6 points)

Parmi les assertions suivantes, démontrer celles qui sont vraies et donner un contre-exemple pour celles qui sont fausses (on indiquera d'abord si l'assertion est vraie ou fausse).

1. Soit X un schéma intègre, régulier et noethérien. Si $\operatorname{Br} X$ est un groupe engendré par une partie finie, alors c'est un groupe fini.

2. Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Soit X une k-variété lisse. Alors pour tout $i \geq 0$, le groupe $H^i(X, \mathbf{G}_m)[n]$ est fini.

3. Soit X une variété lisse sur un corps k avec $\operatorname{Car} k = p > 0$. Alors le faisceau représenté sur le petit site étale par $(\mu_p)_X$ est nul.

4. Soit X une variété lisse sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Alors le groupe de cohomologie plate $H^1_{\text{fppf}}(X, \alpha_p)$ est nul.

Exercise 2 : La propriété d'injectivité (7 points)

Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit G un k-schéma en groupes commutatif lisse et de type fini. Soit $i > 0$ un entier. On dit que la *propriété d'injectivité vaut pour la paire* (i, G) si pour tout anneau local régulier A de corps des fractions K et tel que $k \subset A$, la flèche canonique $H^i(A, G) \to H^i(K, G)$ est injective (on écrit $H^i(A, G)$ pour $H^i_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} A, G_A)$, où $G_A := G \times_k A$; de même $H^i(K, G) := H^i_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} K, G_K)$ avec $G_K = G \times_k K$).

1. La propriété d'injectivité vaut-elle pour la paire $(1, \mathbf{G}_m)$? Et pour la paire $(2, \mathbf{G}_m)$?

2. Soit X une k-variété lisse. On suppose que X possède un point k-rationnel $x \in X(k)$.

a) Montrer que pour tout ouvert de Zariski U de X avec $x \in U$, la flèche canonique $H^i(k, G) \to H^i(U, G)$ est injective.

b) On suppose de plus que X est intègre de corps des fonctions F et que (i, G) a la propriété d'injectivité. Montrer que la flèche canonique $H^i(k, G) \to H^i(F, G)$ est injective.

3. Montrer que pour tout entier $n > 0$, la paire $(2, \mu_n)$ a la propriété d'injectivité.

4. On suppose que G est un schéma en groupes fini sur k. Soit A un anneau local régulier de corps des fractions K, on note $j : \operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} A$ l'inclusion du point générique. Montrer que la flèche canonique $G_A \to j_* G_K$ est un isomorphisme, puis que $(1, G)$ a la propriété d'injectivité.

Exercise 3 : Cohomologie des corps locaux et globaux (9 points)

1. Soit R un anneau de valuation discrète hensélien de corps des fractions E et de corps résiduel parfait k. Soit $X = \operatorname{Spec} R$, on note $x \simeq \operatorname{Spec} k$ le point fermé de X et $u = X - \{x\} \simeq \operatorname{Spec} E$ son point générique. On a une immersion fermée $i : x \hookrightarrow X$ et une immersion ouverte $j : u \hookrightarrow X$. Soit F un faisceau étale sur u et $r \geq 0$, on admettra que $H^r(X, j_! F) = 0$.

a) Montrer qu'on a un isomorphisme $H^r(u, F) \simeq H^{r+1}_x(X, j_! F)$.

b) Montrer qu'on a pour tout faisceau $\mathcal{F}$ sur X : $H^r(X, \mathcal{F}) \simeq H^r(x, i^* \mathcal{F})$.

c) Soit $g = \operatorname{Gal}(\bar{k}/k)$ le groupe de Galois absolu de k. Montrer qu'on a pour tout $r \geq 0$: $H^r(X, \mathbf{Z}) \simeq H^r(g, \mathbf{Z})$.

d) Déterminer $H^r(X, \mathbf{Z})$ pour $r \in \{0, 1, 2\}$ quand le corps k est fini.

2. Soit K un corps de nombres d'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ (ex. $K = \mathbf{Q}$, $\mathcal{O}_K = \mathbf{Z}$). Soit U un ouvert de Zariski non vide de $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_K)$. Soit $V \subset U$ un autre ouvert de Zariski non vide, on note $j : V \to U$ l'immersion ouverte. On note $\mathcal{O}_v$ l'anneau local d'un point fermé $v \in \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_K)$ et $\mathcal{O}_v^h$ son hensélisé. On pose $K_v = \operatorname{Frac}(\mathcal{O}_v^h)$ et on considère un faisceau étale F sur V.

a) Soit $U_v := \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_v^h)$. Montrer: $H^r_{U-V}(U, j_! F) \simeq \bigoplus_{v \in U-V} H^r_v(U_v, j_! F)$.

b) Montrer qu'on a une suite exacte longue

$$... \to H^r(U, j_! F) \to H^r(V, F) \to \bigoplus_{v \in U-V} H^r(K_v, F) \to ...$$