Partiel de mathématiques générales, M1 (3h)

D. Harari, K. Destagnol

19 octobre 2022

Tout énoncé vu en cours (mais pas s'il a été vu seulement en TD) peut être utilisé sans démonstration. On peut dans chaque exercice admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure.

Exercice 1 : Groupes abéliens

Dans tout l'exercice, on fixe un nombre premier p. Pour tout groupe abélien (noté additivement sauf mention explicite du contraire) $(A, +)$, on considère le morphisme

$$m_p : A \to A, \quad x \mapsto px$$

et on pose $A[p] := \ker m_p$, $A_p := A/pA = A/\operatorname{Im} m_p$.

1. On suppose que A est fini.

a) Montrer que $A[p]$ et A_p ont même cardinal.

b) Montrer que $A[p]$ et A_p sont des p-groupes.

c) Montrer que $A[p]$ et A_p sont isomorphes.

d) Montrer que les groupes $A[p]$ et A_p sont différents de $\{0\}$ si et seulement si p divise le cardinal de A.

2. a) Dans le cas où A est le groupe additif $\mathbf{Z}$, calculer les cardinaux des groupes $A[p]$ et A_p. Même question quand A est le groupe *multiplicatif* $\mathbf{C}^*$.

b) Donner un exemple de groupe abélien A tel que $A[p]$ est infini et A_p fini.

c) Donner un exemple de groupe abélien B tel que $B[p]$ est fini et B_p infini.

Exercice 2 : Groupes symétriques

Soit n un entier strictement positif. Soit G un groupe. On considère un morphisme f du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ dans G. On suppose que f n'est pas injectif.

a) On suppose $n \geq 5$. Montrer qu'il existe un morphisme $u : \{\pm 1\} \to G$ tel que $f = u \circ \varepsilon$, où $\varepsilon : \mathcal{S}_n \to \{\pm 1\}$ est la signature.

b) On prend $n = 4$. Montrer que $\operatorname{Im} f$ est de cardinal au plus 6.

c) Donner un exemple avec $n = 4$ et $\operatorname{Im} f$ de cardinal > 2.

d) On suppose G abélien. Montrer que la conclusion de a) vaut encore pour $n = 4$.

Exercice 3 : Opération d'un groupe et centre

Soient G un groupe et N un sous-groupe distingué de G. On suppose que N est abélien et on pose $H = G/N$.

a) Montrer qu'on définit une opération de H sur N en posant, pour tout g de G et tout n de N :

$$\bar{g}.n = gng^{-1}.$$

b) Montrer que cette opération est triviale si et seulement si N est contenu dans le centre Z de G.

c) En déduire que si $\mathtt{Aut}\, N$ et H sont des groupes finis de cardinaux premiers entre eux, alors $N \subset Z$.

d) On suppose que N est un groupe cyclique et que H est un groupe parfait (c'est-à-dire égal à son sous-groupe dérivé). Montrer que $N \subset Z$.