Partiel d'algèbre, M1 (3 heures)

D. Harari, M. Gomez-Aparicio, K. Destagnol

22 octobre 2022

Tout énoncé vu en cours (mais pas s'il a été vu seulement en TD) peut être utilisé sans démonstration. On peut dans chaque exercice admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure.

Exercice 1 : Groupes symétriques (5 points)

Dans cet exercice, on pourra utiliser sans démonstration que si $n \geq 5$, le seul sous-groupe distingué de $\mathcal{S}_n$ qui ne contient pas $\mathcal{A}_n$ est le groupe trivial.

a) Montrer que l'ensemble X des 5-Sylow de $\mathcal{S}_5$ est de cardinal 6.

b) Montrer qu'il existe une opération fidèle et transitive de $\mathcal{S}_5$ sur X.

c) En déduire que le groupe $\mathcal{S}_6$ possède un sous-groupe H d'indice 6 qui opère transitivement sur l'ensemble $\{1, ..., 6\}$.

d) Soit H' le sous-groupe de $\mathcal{S}_6$ constitué des permutations qui laissent fixe l'élément 1 de l'ensemble $\{1, 2, ..., 6\}$. Existe-t-il $g \in \mathcal{S}_6$ tel que $H = gH'g^{-1}$?

Exercice 2 : Automorphismes de groupes abéliens (4 points)

Soient p un nombre premier et n un entier naturel strictement positif. On note A le groupe additif $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^n$.

a) Montrer que le groupe $G := \mathtt{Aut}(A)$ des automorphismes du groupe abélien A est isomorphe au groupe matriciel $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$.

b) Pour quelles valeurs de n le groupe G est-il commutatif ?

c) On suppose que $n \geq 2$. Montrer que A contient un sous-groupe H qui est distingué dans A mais n'est pas caractéristique dans A.

Exercice 3 : Idéaux premiers (7 points)

Dans tout l'exercice, on désigne par A un anneau commutatif.

a) Soit $\wp$ un idéal premier de A. Soient $I_1, ..., I_r$ des idéaux de A, on note $I_1 ... I_r$ l'idéal produit (engendré par les $x_1 ... x_r$ avec $x_j \in I_j$ pour tout

$j \in \{1, ..., r\}$). Montrer que si $\wp \supset I_1...I_r$, alors il existe $j \in \{1, ..., r\}$ tel que $\wp \supset I_j$.

b) Soit I un idéal de A. On suppose que I n'est pas premier et que $I \neq A$. Montrer qu'il existe des idéaux I_1 et I_2 de A, contenant strictement I, et tels que $I_1 I_2 \subset I$.

On suppose dans toute la suite de l'exercice que A est noethérien. Un idéal premier $\wp$ de A est dit *minimal* si le seul idéal premier de A inclus dans $\wp$ est $\wp$.

c) Montrer que pour tout idéal I de A, il existe des idéaux premiers $\wp_1, ..., \wp_m$ de A tels que $I \supset \wp_1 ... \wp_m$ (on pourra raisonner par l'absurde en considérant un idéal I maximal parmi ceux qui ne vérifient pas la propriété voulue).

d) Montrer qu'il existe des idéaux premiers $\wp_1, ..., \wp_m$ de A tel que tout idéal premier de A contienne l'un des $\wp_i$.

e) En déduire que A n'a qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux.

f) Décrire l'ensemble des idéaux premiers minimaux de A si A est intègre, puis si $A = \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$.

Exercice 4 : Anneaux de polynômes (4 points)

Soit K un corps. On considère la K-algèbre des polynômes $A = K[T]$, et la sous K-algèbre $B = K[T^2, T^3]$ de A engendrée par $\{T^2, T^3\}$.

a) Quels sont les inversibles de l'anneau B ?

b) Montrer que les diviseurs de T^2 dans A sont les polynômes de la forme aT^m avec $a \in K^*$ et m entier naturel au plus égal à 2.

c) En déduire que T^2 est irréductible dans B.

d) Montrer que B n'est pas un anneau factoriel.