Examen de mathématiques générales I, M1 (3h)

D. Harari, K. Destagnol

18 décembre 2023

Tout énoncé vu en cours (mais pas s'il a été vu seulement en TD) peut être utilisé sans démonstration. On peut dans chaque exercice admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure.

Le symbole (*) désigne une question a priori plus difficile.

Exercice 1 : Vrai ou faux ? (6 points)

Parmi les assertions suivantes, démontrer celles qui sont vraies et donner un contre-exemple pour celles qui sont fausses (on indiquera d'abord si l'assertion est vraie ou fausse).

a) Si p est un nombre premier et S est un p-Sylow d'un groupe fini G tel que S est distingué dans G, alors S est l'unique p-Sylow de G.

b) Si G est un groupe fini dont le sous-groupe dérivé est abélien, alors G est abélien.

c) Si A est un anneau principal, alors il n'a qu'un seul idéal maximal.

d) Si A est un anneau factoriel, alors tout polynôme de degré 1 de $A[X]$ est irréductible.

Exercice 2 : Groupes (8 points)

Soit G un groupe. On note $\widehat{G}$ l'ensemble des morphismes de G dans $(\mathbf{C}^*, \times)$. $\widehat{G}$ est un groupe multiplicatif (on ne demande pas de le vérifier) dont le neutre est l'application constante égale à 1, le produit de deux éléments de $\widehat{G}$ étant défini par $(fg)(x) = f(x)g(x)$ pour tous $f, g \in \widehat{G}$ et tout $x \in G$.

a) Montrer que si $f \in \widehat{G}$, alors on a $f(x) = 1$ pour tout $x \in D(G)$, où $D(G)$ est le sous-groupe dérivé de G.

b) On pose $G^{\mathrm{ab}} := G/D(G)$. On définit une application Φ de $\widehat{G^{\mathrm{ab}}}$ dans $\widehat{G}$ par

$$(\Phi(f))(x) = f(\bar{x}),\ \forall f \in \widehat{G^{\mathrm{ab}}},\ \forall x \in G,$$

où $\bar{x}$ est la classe de x dans $G^{\mathrm{ab}} := G/D(G)$. Montrer que Φ est un isomorphisme de groupes.

c) Soit $n \geq 5$. Déterminer le groupe $\widehat{\mathcal{S}_n}$ (on pourra commencer par rappeler quel est le sous-groupe dérivé de $\mathcal{S}_n$).

(*) d) Montrer que si G est un groupe cyclique, alors les groupes $\widehat{G}$ et G sont isomorphes.

(*) e) On rappelle que tout groupe abélien fini est isomorphe à un produit de groupes cycliques. Montrer que pour tout groupe abélien fini A, les groupes A et $\widehat{A}$ sont isomorphes (on pourra commencer par comparer $(\widehat{A \times B})$ et $\widehat{A} \times \widehat{B}$ quand A et B sont deux groupes).

Exercice 3 : Anneaux commutatifs (7 points)

Soit A un anneau intègre de corps des fractions K. Pour tout $x \in K^*$, on note x^{-1} son inverse dans K^*. On suppose que A est un *anneau de valuation*, c'est-à-dire que pour tout $x \in K^*$ on a $x \in A$ ou $x^{-1} \in A$.

a) Soient x, y dans A. Montrer que dans l'anneau A, on a : x divise y ou y divise x.

b) En déduire que l'ensemble M des éléments de A qui ne sont pas inversibles dans A est un idéal de A (on pourra commencer par montrer que si $x \in M$ et $a \in A$, alors $ax \in M$).

c) Montrer que M est l'unique idéal maximal de A.

d) Soit p un nombre premier. On note $\mathbf{Z}_{(p)}$ le sous-ensemble de $\mathbf{Q}$ constitué des a/b avec $a, b \in \mathbf{Z}$ et b non divisible par p. Montrer que $\mathbf{Z}_{(p)}$ est un anneau de valuation de corps des fractions $\mathbf{Q}$.

e) Soient $a, b \in A$. Montrer que l'idéal (a, b) de A engendré par a et b est principal.

f) En déduire que si A est noethérien, alors A est un anneau principal.