Feuille TD 2 – Exercices Algèbre – Anneaux

Ce fascicule d'exercices sur les anneaux nous occupera durant les ***cinq semaines*** *de cours sur le sujet. Il comporte beaucoup d'exercices (orientés vers ce qui sera attendu de vous au concours de l'agrégation externe) et (pas de panique!) nous n'aurons pas le temps de tous les traiter en classe et il ne sera pas exigé de votre part de tous les traiter! Il s'agit simplement pour vous d'une banque d'exercices et vous êtes simplement invités à regarder par vous-mêmes les exercices que l'on ne traitera pas ensemble et portant sur les sujets sur lesquels vous souhaitez vous exercer et* ***à me poser d'éventuelles questions*** *soit en TD soit par mail à l'adresse mail suivante* `kevin.destagnol@universite-paris-saclay.fr`. *Un* ***corrigé*** *sera disponible sur Ecampus.*

Dans toute cette feuille d'exercices, sauf mention contraire, tous les anneaux seront supposés commutatifs.

1 Généralités

Exercice 1. Montrer que tout anneau intègre fini est un corps.

Exercice 2.

1. Montrer qu'un anneau A est un corps si, et seulement si, l'ensemble de ses idéaux a exactement deux éléments.
2. Plus généralement, montrer que si l'on suppose que A est intègre et possède un nombre fini d'idéaux, alors c'est un corps.

Exercice 3. Soient A un anneau et I, J deux idéaux de A. On note

$$I + J = \{i + j \ : \ (i, j) \in I \times J\}$$

et IJ l'idéal engendré par les ij avec $(i, j) \in I \times J$.

1. Montrer que $I + J$ et IJ sont des idéaux de A et que $IJ \subseteq I \cap J$.
2. Montrer que si $I + J = A$, alors $IJ = I \cap J$.

Exercice 4.

1. Montrer que l'image réciproque d'un idéal premier par un morphisme d'anneaux reste un idéal premier.
2. Le résultat précdent reste-t-il valable pour un idéal maximal? Et si le morphisme est surjectif?
3. Montrer que dans un anneau principal, tout idéal premier non nul est maximal. Décrire les idéaux premiers et maximaux de $\mathbf{Z}$.
4. Soit A un anneau qui n'est pas un corps. Montrer que $p \in A$ est irréductible si, et seulement si, (p) est maximal dans l'ensemble des idéaux principaux de A privé de A.

Exercice 5.

1. Soient $\mathfrak{P}$ un idéal premier de A et $I_1 n \ldots, I_n$ des idéaux de A. On suppose que $I_1 I_2 \cdots I_n \subseteq \mathfrak{P}$. Montrer que $\mathfrak{P}$ contient l'un des I_k.
2. Montrer que si I est un idéal non premier, il existe des idéaux I_1, I_2 distincts tels que $I \subseteq I_1$, $I \subseteq I_2$ et $I_1 I_2 \subseteq I$.

Exercice 6.

1. Soit $m \in \mathbb{N}$ et $m \mid n$. On pose
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times & \longrightarrow & (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^\times \\ \overline{x}^n & \longmapsto & \overline{x}^m \end{array} \right.$$
Montrer qu'il s'agit d'un morphisme de groupes surjectif.
On pourra commencer par traiter le cas des puissances d'un nombre premier.
2. Résoudre $7x = 2$ dans $\mathbf{Z}/37\mathbf{Z}$. Puis résoudre $10x = 6$ dans $\mathbf{Z}/34\mathbf{Z}$.
3. Résoudre le système suivant sur $\mathbf{Z}/18\mathbf{Z}$:
$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 4y = 2. \end{array} \right.$$
4. Résoudre $x^2 + x + 7 = 0$ dans $\mathbf{Z}/13\mathbf{Z}$ puis $x^2 - 4x + 3 = 0$ dans $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$.

Exercice 7. Soit A un anneau commutatif, et soit S une partie multiplicative de A, c'est-à-dire que S contient 1, et si $s, t \in S$, alors $st \in S$. On veut définir la *localisation* $S^{-1}A$ de A par rapport à S.

1. Montrer qu'on peut définir une relation d'équivalence sur $A \times S$ comme suit : (a,s) est équivalent à (b,t) s'il existe un $u \in S$ tel que $u(at-bs)=0$. Soit $S^{-1}A$ l'ensemble des classes d'équivalences. On écrira $\frac{a}{s}$ pour désigner la classe d'équivalence de (a,s).
2. Montrer que $S^{-1}A$, muni des opérations $\frac{a}{s}+\frac{b}{t}=\frac{at+bs}{st}$ et $\frac{a}{s}\cdot\frac{b}{t}=\frac{ab}{st}$, est un anneau commutatif.
3. Montrer que si S contient 0, alors $S^{-1}A$ est un anneau trivial.
4. Montrer que l'application $f : A \to S^{-1}A$ définie par $a \mapsto \frac{a}{1}$ est un morphisme d'anneaux. Montrer que f est injectif si S ne contient pas de diviseurs de zéro.
5. Cas particulier : corps des fractions. Supposons que A est intègre, et que $S = A \setminus \{0\}$. Montrer que $S^{-1}A$ est un corps, appelé le *corps des fractions* de A.
6. Cas particulier : localisation en un idéal premier. Soit P un idéal premier de A. Montrer que $S = A \setminus P$ est une partie multiplicative de A. On écrit A_P pour désigner $S^{-1}A$ dans ce cas.
7. Cas particulier (suite) : Montrer que l'idéal engendré par l'image de P dans A_P est le seul idéal maximal de A_P.

EXERCICE 8. Pour un anneau commutatif A et un idéal I de A, on définit le *radical de I* comme étant l'ensemble

$$\sqrt{I} = \{x \in A \mid \exists n \geq 1 \text{ tel que } x^n \in I\}.$$

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A et que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
2. Montrer que si P est un idéal premier de A, alors $\sqrt{P} = P$.
3. Soit $x \notin \sqrt{I}$ et soit $S = \{x^n \mid n \in \mathbf{N}\}$. Montrer que S est une partie multiplicative de A qui est disjointe de I. En considérant l'anneau $S^{-1}A$, en déduire qu'il existe un idéal premier P contenant I mais pas x.
4. En déduire que $\sqrt{I}$ est l'intersection de tous les idéaux premiers de A contenant I (on suppose ici que I est différent de A).
5. Le *nilradical* de A est l'ensemble de tous les éléments *nilpotents* de A :

   $$\mathcal{N}(A) = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbf{N} \text{ tel que } x^n = 0\}.$$

   Montrer que le nilradical de A est un idéal, et que c'est l'intersection de tous les idéaux premiers de A.

EXERCICE 9. Le *radical de Jacobson* d'un anneau commutatif A est l'intersection de tous les idéaux maximaux de A. On le note $\operatorname{rad} A$.

1. Soit A un anneau. Montrer qu'un élément a est dans le radical de A si, et seulement si, pour tout $x \in A$, $1-ax$ est inversible.
2. Toujours en supposant que A est commutatif, montrer que si $x \in A$ est nilpotent, alors $1-ax$ est inversible, pour tout élément $a \in A$.
3. Toujours dans le cas commutatif, montrer que le radical de A est le plus grand idéal de A tel que $1-x$ est inversible pour tout $x \in \operatorname{rad} A$.
4. Toujours dans le cas où A est commutatif, soit I un idéal dont tous les éléments sont nilpotents. Montrer que $I \subseteq \operatorname{rad} A$.
5. Calculer le radical de $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}[X]$, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ (pour un entier $n > 1$).

EXERCICE 10. Un anneau commutatif est dit *local* s'il n'admet qu'un seul idéal maximal.

1. Montrer qu'un anneau commutatif est local si, et seulement si, l'ensemble de ses éléments non inversibles est un idéal, et que dans ce cas, cet idéal est l'unique idéal maximal.
2. Montrer qu'un anneau commutatif est local si, et seulement si, pour tout élément x de cet anneau, au moins l'un de x ou $1-x$ est inversible.
3. Un élément x est dit *idempotent* si $x^2 = x$. Montrer que si A est un anneau local, alors ses seuls idempotents sont 1 et 0. Donner un exemple d'anneau pour lequel la réciproque est fausse.
4. Soient k un corps et n un entier strictement positif. Montrer que $k[x]/(x^n)$ est un anneau local, et déterminer son idéal maximal.
5. Soit p un nombre premier, et soit $\mathbf{Z}_{(p)}$ la localisation de $\mathbf{Z}$ par rapport à l'idéal premier (p) (voir l'exercice **3**). Montrer que $\mathbf{Z}_{(p)}$ est local, et calculer son idéal maximal.

   Montrer que cet ensemble, muni de la somme et du produit induits par ceux pour les fonctions continues, est un anneau commutatif local.

2 Anneaux euclidiens, factoriels, principaux, noethériens

EXERCICE 11. Soit A un anneau factoriel. On suppose qu'il vérifie le théorème de Bézout, *i.e.* pour tous $a, b \in A$ premiers entre eux, il existe $u, v \in A$ avec $ua + vb = 1$.

1. Montrer que si $a, b \in A$ ont pour pgcd d, alors il existe $u, v \in A$ avec $ua + bv = d$.

2. Montrer que si une famille finie $a_1, \ldots, a_n$ d'éléments de A a pour pgcd 1, alors il existe des éléments $u_1, \ldots, u_n$ de A avec $\sum_{i=1}^n u_i a_i = 1$.
3. Montrer que si I est un idéal de A, alors il existe une famille finie d'éléments de I dont le pgcd est le pgcd de tous les éléments de I.
4. En déduire que A est principal.

Exercice 12. Soit A un anneau intègre. On dit que deux idéaux I et J de A sont *étrangers* si $I + J = A$ (de manière équivalente, cela signifie que 1 appartient à l'idéal $I + J$).

1. Montrer que si I_1 et I_2 sont tous deux étrangers avec J, alors l'idéal $I_1 I_2$ (constitué des sommes d'éléments de la forme $a_1 a_2$ avec $a_1 \in I_1$ et $a_2 \in I_2$) est encore étranger avec J.
2. On suppose que A est factoriel et que tout idéal premier non nul de A est maximal. Montrer que si $p \in A$ est irréductible et ne divise pas a, alors (p) est étranger avec (a).
3. On garde les hypothèses de b). Montrer que si $a, b \in A$ sont premiers entre eux, les idéaux (a) et (b) sont étrangers. En déduire que A est principal en utilisant l'exercice 11 de cette feuille.

Exercice 13. Dans l'anneau $A = \mathbf{Z}[i\sqrt{5}]$, trouver deux éléments qui n'ont pas de pgcd et deux éléments qui n'ont pas de ppcm.

Exercice 14. Soit $\mathcal{H}$ l'anneau des fonctions holomorphes de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$.

1. Montrer que $\mathcal{H}$ est intègre. Quel est son corps des fractions ?
2. Montrer que $\mathcal{H}^\times$ est constitué des fonctions qui ne s'annulent pas, et que l'ensemble des irréductibles de $\mathcal{H}$ est constitué des fonctions qui ont un seul zéro avec de plus ce zéro simple.
3. Montrer que $\mathcal{H}$ n'est ni factoriel ni noethérien, en exhibant un élément non inversible qui ne se décompose pas en produit d'irréductibles.

Exercice 15. Soit $\mathbf{Z}[i]$ l'anneau des entiers de Gauß.

1. Soit p un nombre premier. Montrer que p est irréductible dans $\mathbf{Z}[i]$ si, et seulement si, p ne s'écrit pas comme somme de deux carrés d'entiers.
2. Soit p un nombre premier congru à 3 modulo 4. Montrer que si pour deux entiers a et b, on a $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod p$, alors p divise a et b.
3. Montrer qu'une somme de deux carrés d'entiers est congrue à 0, 1 ou 2 modulo 4.
4. En déduire qu'un nombre premier p est irréductible dans $\mathbf{Z}[i]$ si, et seulement si, $p \equiv 3 \bmod 4$. (Indication : on pourra calculer $(p-1)! \pmod p$).

Exercice 16. Soit A le sous-anneau de $\mathbf{C}$ engendré par $\alpha = \frac{1+i\sqrt{19}}{2}$. Le but de cet exercice est de montrer que A est principal, mais pas euclidien.

1. Montrer d'abord que, si B est un anneau euclidien, alors il existe un élément non inversible $x \in B$ tel que la restriction à $B^\times \cup \{0\}$ de la projection de B sur $B/(x)$ soit surjective. Ceci nous servira de critère pour montrer que l'anneau A n'est pas euclidien.
2. Donner un polynôme du second degré à coefficients entiers P s'annulant en α. En déduire que A est isomorphe à $\mathbf{Z}[X]/P$ et que le groupe abélien sous-jacent à A est engendré par 1 et α. Vérifier que l'application norme, qui à $z \in A$ associe $N(z) = z\bar{z}$, prend ses valeurs dans $\mathbf{N}$.
3. Montrer que 1 et -1 sont les seuls éléments inversibles de A.
4. Montrer qu'il n'existe pas de morphisme d'anneaux de A dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ (indication : pour chacun des deux cas, supposer que f soit un tel morphisme, et étudier l'image par f du polynôme trouvé en (**2.**)).
5. En déduire que A n'est pas euclidien (indication : utiliser le critère de (**1.**)).
6. On va montrer que A est principal.
   (a) Montrer que pour tout a, b éléments non nuls de A, il existe $q, r \in A$ tels que $r = 0$ ou $N(r) < N(b)$ et qui vérifient, soit $a = bq + r$, soit $2a = bq + r$.
   (b) Montrer que l'idéal engendré par 2 est maximal dans A (on pourra utiliser le fait que A est isomorphe à un quotient de $\mathbf{Z}[x]$).
   (c) Montrer que A est principal.

Exercice 17. On rappelle qu'un anneau commutatif A est *noethérien* si, pour toute chaîne d'idéaux

$$I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \ldots$$

de A, il existe un entier N tel que si $n \geq N$, alors $I_n = I_{n+1}$.
Montrer que l'anneau $C^0([0,1])$ des fonctions continues $[0,1] \to \mathbf{R}$ n'est pas noethérien. Pour ce faire, on montrera que l'idéal des fonctions s'annulant en 0 n'est pas finiment engendré.

Exercice 18. On considère le nombre complexe $\zeta := e^{2\pi i/3}$ et l'on définit un sous-groupe additif de $\mathbf{C}$ en posant $R := \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\zeta$.

1. Montrer que R est un sous-anneau de $\mathbf{C}$, puis que R est isomorphe, en tant qu'anneau, à $\mathbf{Z}[X]/(X^2+X+1)$.
2. Établir la majoration :
$$\sup_{z\in\mathbf{C}}\inf_{\alpha\in R}|z-\alpha|<1.$$
Indication : Il est recommandé de tracer une figure.
3. Montrer que R est un anneau euclidien.
Quel est le groupe mutiplicatif $R^\times$ des unités de R ?
4. Dans la suite de cette partie, on désigne par p un nombre premier et l'on note $\mathbf{F}_p := \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.
Montrer qu'il existe des isomorphismes d'anneaux
$$R/pR \cong \mathbf{Z}[X]/(p, X^2+X+1) \cong \mathbf{F}_p[X]/(X^2+X+1).$$
5. Montrer que, si $p \neq 3$, les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) Le polynôme X^2+X+1 admet un racine dans $\mathbf{F}_p$;
   (b) Le polynôme X^3-1 admet une racine $\neq 1$ dans $\mathbf{F}_p^\times$;
   (c) $p \equiv 1 \pmod 3$.
6. Montrer que, si $p \neq 3$, les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) $p \equiv 1 \pmod 3$;
   (b) p n'est pas premier dans R;
   (c) Il existe (x,y) dans $\mathbf{Z}^2$ tel que $p = x^2-xy+y^2$.
7. Dans R, l'élément 3 est-il premier ?

3 Anneaux de polynômes

Exercice 19 — Deux résultats très utiles.

1. Soit A un anneau et soit $P \in A[X]$ non nul de coefficient dominant inversible. Pour tout $F \in A[X]$, montrer qu'il existe $Q, R \in A[X]$ tels que $F = PQ + R$ avec deg$(R) <$ deg(P) ou $R = 0$.
2. Soit k un corps et P un polynôme irréductible de $k[X]$. Montrer que $k[X]/(P)$ est un corps.

Exercice 20.

1. Calculer $A[X]^\times$ lorsque A est un anneau quelconque.
2. Soit B un anneau et A un sous-anneau de B. Soit $b \in B$. On dit que b est *entier* sur A s'il vérifie une équation unitaire :
$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \quad \text{avec} \quad a_0, \ldots, a_{n-1} \in A.$$
Un anneau intègre est dit *intégralement clos* si pour tout $x \in K = \mathrm{Frac}(A)$, si x est entier sur A alors $x \in A$.
   (a) Montrer qu'un anneau factoriel est intégralement clos.
   (b) Soit $d \in \mathbf{Z}$ un entier sans facteur carré non nul. On pose :
   $$\mathbf{Z}\big[\sqrt{d}\big] = \{a + b\sqrt{d} \in \mathbf{C} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}.$$
   Montrer que si $d \equiv 1 \pmod 4$, alors $\mathbf{Z}[\sqrt{d}]$ n'est pas intégralement clos.
   Indication : Considérer l'élément $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$.

Exercice 21. Montrer qu'un polynôme $P(X,Y) \in \mathbf{Z}[X,Y]$ est tel que $P\big(t^2, t^3\big) = 0$ pour tout $t \in \mathbf{Z}$ si, et seulement si, il existe un polynôme $Q(X,Y) \in \mathbf{Z}[X,Y]$ tel que $P(X,Y) = (X^3 - Y^2)\cdot Q(X,Y)$. En déduire un isomorphisme de $\mathbf{Z}$-algèbres
$$\mathbf{Z}[X,Y]/\big(X^3-Y^2\big) \cong \{P \in \mathbf{Z}[T] \ : \ P'(0) = 0\} \cong \mathbf{Z}[T^2, T^3].$$

Exercice 22. Soit k un corps et N un entier naturel. On considère l'anneau de polynômes $A := k[X_1, \ldots, X_N]$, un élément $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_N)$ de k^N et un élément P de A.
Vérifier que l'on définit des idéaux de A en posant
$$I_1 := (P) = P\cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}.$$
Montrer que I_1 et I_2 sont des idéaux étrangers si, et seulement si, $P(\mathbf{a}) \neq 0$. On rappelle que, par définition, I_1 et I_2 sont des idéaux étrangers de A si $I_1 + I_2 = A$.

EXERCICE 23. Soit $Q \in \mathbf{Z}[X]$ unitaire. On note $z_1, \ldots, z_n$ ses racines (pas forcément distinctes) dans $\mathbf{C}$. Montrer que

$$\prod_{i \neq j} (z_i - z_j) \in \mathbf{Z}.$$

EXERCICE 24.

1. Soit A un anneau factoriel, et soit K le corps des fractions de A. Donner un exemple de polynôme réductible dans $A[X]$ et irréductible dans $K[X]$ et un exemple de polynôme irréductible dans $A[X]$ et réductible dans $K[X]$.
2. Donner les éléments irréductibles de $\mathbf{Z}[X]$ en fonction de ceux de $\mathbf{Q}[X]$ et de $\mathbf{Z}$.
3. Donner une procédure permettant de déterminer si un polynôme de degré au plus 3 est irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$.
4. Soit K un corps, et soient $P, Q \in K[X]$ premiers entre eux. Montrer que $P \cdot Y + Q$ est irréductible dans $K[X, Y]$.
5. Soit $a \in \mathbf{Z}$. À quelle condition $X^4 - a$ est-il irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$? et $X^4 - aX - 1$ dans $\mathbf{Z}[X]$?

EXERCICE 25. Montrer que les polynômes suivants sont irréductibles.

1. Pour $n > 0$ et p premier, $X^n - p$ sur $\mathbf{Q}$;
2. $X^4 + X + 1$ sur $\mathbf{Q}$;
3. $X^6 + X^2 + 1$ sur $\mathbf{Q}$;
4. Pour $n > 0$, $X^n - T$ sur $K(T)$ (K un corps);
5. $1 + X + \ldots + X^{p-1}$ sur $\mathbf{Q}$, pour p premier.

EXERCICE 26.

1. Soient K et L deux corps tels que L contienne K ainsi que $P, Q \in K[X]$. Montrer que le pgcd de P et Q dans $K[X]$ est le même que le pgcd de P et Q dans $L[X]$.
   Indication : On pourra commencer par le cas premier entre eux.
2. Donner un exemple d'algèbre à division et de polynôme admettant plus de racines que son degré sur cette dernière.

4 Pour aller plus loin

EXERCICE 27. Soit K un corps. Soit $A = K[X, Y]$. On note B la sous-algèbre de A engendrée par les XY^n pour $n \in \mathbf{N}$.

1. Montrer que si $Q(X, Y)$ est dans B, alors $Q(0, Y)$ est un polynôme constant.
2. Soit $r \in \mathbf{N}^\times$. Comparer les idéaux de B engendrés par $(X, XY, \ldots, XY^r)$ et $(X, XY, \ldots, XY^r, XY^{r+1})$.
3. La K-algèbre B est-elle un anneau noethérien ? Une K-algèbre de type fini ?

EXERCICE 28. Soit k un corps. On note $F = k(X)$ le corps des fractions rationnelles.

1. Soient $R_1 = P_1/Q_1, \ldots, R_s = P_s/Q_s$ des éléments de F, avec $P_i \in k[X]$ et Q_i non nul dans $k[X]$ pour tout i de $\{1, \ldots, s\}$. Soit B la sous-k-algèbre de F engendrée par $R_1, \ldots, R_s$. Montrer qu'il existe un polynôme non nul $G \in k[X]$ tel que $B \subseteq (k[X])[G^{-1}]$.
2. En déduire que F n'est pas de type fini en tant que k-algèbre.

EXERCICE 29 — ARTIN-TATE. Soient B un anneau, L un sous-anneau de B et A un sous-anneau de L. On suppose que L est un corps, que B est un L-espace vectoriel de dimension finie, et que B est aussi une A-algèbre de type fini. On se propose de montrer que L est une A-algèbre de type fini. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dans B tels que $B = A[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$.

1. Soit $\beta_1, \ldots, \beta_m$ une base de B sur L, avec $\beta_1 = 1$. On écrit

   $$\beta_i \beta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ijk} \beta_k; \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} \beta_j,$$

   avec $a_{ijk}, b_{ij} \in L$. Soit C la sous A-algèbre de L engendrée par les a_{ijk} et les b_{ij}. Montrer que tout élément x de B s'écrit :

   $$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i,$$

   où les λ_i sont dans C.
2. En déduire que $L = C$, et conclure.

EXERCICE 30 — LEMME DE ZARISKI. Cet exercice utilise les exercices 28 et 29. Soient $k \subset K$ deux corps, tels que K soit une k-algèbre de type fini. Le but de l'exercice est de montrer que K est un k-espace vectoriel de dimension finie. Pour cela on écrit $K = k[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, et on raisonne par récurrence en supposant le résultat vrai jusqu'à $n - 1$, le cas $n = 0$ étant trivial.

1. On pose[1] $L = k(\alpha_1)$. Comparer K et $L[\alpha_2, \ldots, \alpha_n]$, et en déduire que K est de dimension finie sur L.
2. En utilisant l'exercice 29, montrer que L est une k-algèbre de type fini.
3. En utilisant l'exercice 28, montrer que α_1 est racine d'un polynôme unitaire de $k[X]$, puis que L est de dimension finie sur k.
4. En déduire le résultat annoncé.

Exercice 31 — Théorème des zéros de Hilbert. Cet exercice utilise le résultat de l'exercice 30. Soit k un corps.

1. Soient $a_1, \ldots, a_n$ dans k. Montrer que le morphisme $u : P \mapsto P(a_1, \ldots, a_n)$ de $k[X_1, \ldots, X_n]$ dans k est surjectif de noyau l'idéal $J = \langle X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n \rangle$.

   On suppose dans la suite que k est algébriquement clos et on se donne I un idéal maximal de $k[X_1, \ldots, X_n]$.
2. Montrer que le corps $L = k[X_1, \ldots, X_n]/I$ est isomorphe (en tant que k-algèbre) à k.
   Indication : On appliquera le résultat principal de l'exercice 8.
3. En déduire qu'il existe $a_1, \ldots, a_n$ dans k tel que I soit l'idéal J du **1.**, c'est-à-dire que I est l'ensemble des polynômes $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$ tels que $P(a_1, \ldots, a_n) = 0$.

1. C'est le corps des fractions de $k[\alpha_1]$.